المتتاليات

المتتالية الحسابية:

$U_{n+1} = U_n + r$

عبارة الحد العام: $U_n = U_p + (n-p).r$

r ← الأساس ($r \neq 0$) ، U_p ← الحد الأول ⇐ (n عدد طبيعي و $n \geq p$)

الوسط الحسابي: a و b و c 3 حدود متتابعة ⇐ $a + c = 2b$

المجموع: مجموع متتالية حسابية $= (n-p+1)\left(\frac{U_p + U_n}{2}\right)$

المتتالية الهندسية:

$U_{n+1} = U_n \cdot q$

عبارة الحد العام: $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$

q ← الأساس ($q \neq 1$) ، U_p ← الحد الأول ⇐

الوسط الهندسي: a و b و c 3 حدود متتابعة ⇐ $a \cdot c = b^2$

المجموع: مجموع متتالية هندسية $= U_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$

المتتالية الثابتة:

$U_{n+1} = U_n$ مثلا $(5, 5, 5)$

متتالية كل حد فيها يساوي الحد الذي قبله هي متتالية حسابية أساسها $r = 0$ وهي متتالية هندسية أساسها $q = 1$

البرهان بالتراجع: ($P(n)$ هي العبارة المراد برهنتها)

① التحقيق: نعوض $n = 0$ ← $P(n=0)$ ← نجد العبارة محققة

② الوراثية ثم البرهان: نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

← ننطلق من $P(n)$ ويجب الوصول إلى عبارة $P(n+1)$

بعد إيجاد عبارة $P(n+1)$ نقول ⇐ إذن بما أن $P(n+1)$ صحيحة فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

موقع الباك ساهل
facebook.com/elbacsaahel

تذكير هام:

$a > b \Leftarrow a + c > b + c$	$a > b \Leftarrow -a < -b$	$a > b \Leftarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
$a > b$ و $(b > 0)$ ⇐ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$a > b$ و $c > d$ ⇐ $a.c > b.d$ (a, b, c, d موجبة)	$a > b$ ⇐ $a.c > b.c$ ($c > 0$)
	$a.c < b.d$ ⇐ (a, b, c, d سالبة)	$a.c < b.c$ ⇐ ($c < 0$)

f متزايدة + $a > b$ ⇐ $f(a) > f(b)$

f متناقصة + $a > b$ ⇐ $f(a) < f(b)$

مثال عن البرهان بالتراجع بإثبات علمي حدث n من n:

$U_0 = 1$ و $U_{n+1} = 1 - \frac{5}{U_n + 5}$ ، العبارة المراد برهنتها في $P(n) = [U_n > -2]$

① التحقيق: محققة ← $P(n=0)$ ← $U_0 > -2$ ← $1 > -2$

② الوراثية والبرهان: نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $[P(n+1)]$ أي $(U_{n+1} > -2)$ أي $\left(1 - \frac{5}{U_n + 5} > -2\right)$

لدينا ← $U_n > -2$ ← $U_n + 5 > 3$ ← $\frac{1}{U_n + 5} < \frac{1}{3}$ ← $\frac{-5}{U_n + 5} > -3$ ← $1 - \frac{5}{U_n + 5} > -2$

① $U_n > -2$ ← $U_{n+1} > -2$ ← إذن بما أن $P(n+1)$ صحيحة فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n > -2$ ②

اتجاه تغير متتالية = رتابة متتالية:

نـدرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

- $U_{n+1} - U_n > 0$ ← (U_n) متزايدة
- $U_{n+1} - U_n < 0$ ← (U_n) متناقصة
- $U_{n+1} - U_n = 0$ ← (U_n) ثابتة
- U_n هندسية أساسها سالب ← (U_n) متناوبة

متتاليتان متجاورتان:

(u_n) و (v_n) متجاورتان معناه:

$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ + (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة أو العكس ←

تخمين حدود متتالية انطلاقا من البيان $u_{n+1} = f(u_n)$:

(نحتاج إلى المنحنى $y=x$ والحد الأول u_0 والمنحنى الممثل $(u_{n+1}=f(u_n))$.

← أولا نعين u_0 على محور الفواصل ثم نستقطع على المنحنى عموديا ثم نسقط على المنحنى $y=x$ أفقيا ثم نسقط على محور الفواصل عموديا فنجد u_1 ، نكرر نفس العملية مع باقي الحدود.



موقع الباك ساهل
facebook.com/elbacsaahel

التخمين حول اتجاه تغير متتالية وتقاربها:

التخمين: يكون عند تواجد البيان وتعيين على الحدود أو عند حساب الحدود سابقا.

إذا كان: $u_0 < u_1 < u_2$ ← (u_n) متزايدة ← 2

$u_0 > u_1 > u_2$ ← (u_n) متناقصة ← 1

من الرسمين السابقين:

التقارب: ← (u_n) متناقصة / متزايدة وتتقارب نحو (فاصلة نقطة تقاطع المنحنى مع $y=x$ و $u_{n+1}=f(u_n)$)

تقارب متتالية:

$\lim u_n = \infty$ ← (u_n) غير متقاربة = متباعدة

إذا كانت (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى حيث $u_n < l$

" " متناقصة و " " من الأسفل حيث $u_n > l$

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ فإن

(u_n) متقاربة ونتقارب نحو l (الغاية)

نهاية متتالية:

لحساب نهاية متتالية بسيطة: عبارة الحد العام u_n أو باستعمال النهايات بالمقارنة

(مع $-1 < a < 1$ ← $a^n \to 0$) ① عبارة الحد العام: نحسب النهاية بتعويض n بـ $+\infty$ فقط

② من عبارة u_{n+1}: نضع $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ثم نعوض كل من u_{n+1} و u_n بـ l

في عبارة u_{n+1}، نحسب l وبعد إيجاده نقول $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

③ باستعمال النهايات بالمقارنة: وهذا إذا كانت u_n موجودة في متراجحة

$[g(n) \leq f(n) \leq h(n)] + [\lim_{x\to+\infty} g(n) = \lim_{x\to+\infty} h(n) = l] \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(n) = l$

$[g(n) \leq f(n)] + \lim_{x\to+\infty} g(n) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(n) = +\infty$

$[g(n) \geq f(n)] + \lim_{x\to+\infty} g(n) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(n) = -\infty$