دوال :

$0^+ = 0,00\ldots01 = 10^{-\infty}$	$x \geq 0 \rightarrow x = 0^+$	عدد a: $x \to a \rightarrow x = a + 0^+$
$0^- = -0,00\ldots01 = -10^{-\infty}$	$x \leq 0 \rightarrow x = 0^-$	حقيقي: $x \leq a \rightarrow x = a + 0^- = a - 0^+$

دالة الأسية (إكسبو e^x)

تعريف

- دالة e^x معرفة على $\mathbb{R}$ — $x \in]-\infty, +\infty[$ — $D_{e^x} = \mathbb{R}$
- $e = e^1 = 2,71\ldots$ — $e^0 = 1$
- دالة e^x موجبة تماما على $\mathbb{R}$ — $e^x > 0$ — دوما + متزايدة على $\mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$ — $(e^u)' = u' \cdot e^u$

خواص

- $e^a \geq e^b \rightarrow a \geq b$
- $e^a = e^b \rightarrow a = b$
- $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

النهايات الشهيرة

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

دالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln x$:

تعريف

- دالة $\ln x$ معرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ — $x \in]0, +\infty[$ — $D_{\ln x} = \mathbb{R}^{+*}$
- $\ln 1 = 0$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- دالة $\ln x$ موجبة تماما على $]1, +\infty[$ — $\ln x > 0 \leftarrow x \in]1, +\infty[$
- دالة $\ln x$ سالبة تماما على $]0, 1[$ — $\ln x < 0 \leftarrow x \in]0, 1[$
- دالة x متزايدة تماما على $\mathbb{R}^{+*}$

خواص

- $\ln x = a \rightarrow x = e^a$
- $e^{\ln a} = a$ و $\ln e^a = a$
- $(\ln a)^m = \ln a^m$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln |a|$
- $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- $\ln a = \ln b \rightarrow a = b$
- $\ln a > \ln b \rightarrow a > b$

النهايات الشهيرة

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = \ln +\infty = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

شفعية دالة :

- زوجية : لكل x من D_f يكون $(-x)$ من D_f أيضا ويحقق : $f(-x) = f(x)$ ← التفسير الهندسي ← C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
- فردية : " " " " $f(-x) = -f(x)$ " " " لمبدأ المعلم
- لا زوجية ولا فردية : لكل x من D_f , $(-x)$ ليس من D_f .

مثال : ليكن $D_f =]-5, 3[\cup]3, +\infty[$ نلاحظ أنه إذا كان $x > 3$ فإن $x < 3$ أي $-x < -3$ وهذا المجال ليس من D_f

توضيح برسم شفعية الدالة :



البقية

- $(+\infty)^n = +\infty$
- $(-\infty)^n = +\infty$ زوجي * $(-\infty)^n = -\infty$ فردي
- $e^{+\infty} = +\infty$
- $e^{-\infty} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$
- $\ln +\infty = +\infty$
- $\ln -\infty = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\frac{+\infty}{\text{عدد}\oplus} = +\infty$ * $\frac{-\infty}{\text{عدد}\oplus} = -\infty$
- $\frac{0^+}{\text{عدد}\oplus} = 0^+$ * $\frac{0^-}{\text{عدد}\oplus} = 0^-$
- $\frac{\text{عدد}\oplus}{+\infty} = 0^+$
- $\frac{\text{عدد}\oplus}{-\infty} = 0^-$
- $\frac{\text{عدد}\oplus}{0^+} = -\infty$
- $\frac{\text{عدد}}{0^-} = -\infty$

facebook.com/elbacsaahel

حالات عدم التعيين:

$\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0\times\infty$ ، $+\infty-\infty$

إزالة ح.ع.ت:

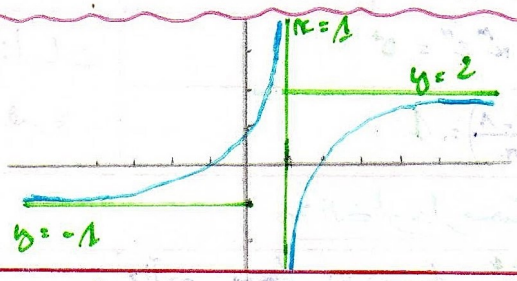
- استخدام النهايات الشهيرة
- التحليل: استخراج عامل مشترك $ab+ac=a(b+c)$
- تقسيم الكسر (إعطاء كل بسط مقامه) $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$
- استعمال خواص $\ln$ و e
- الضرب في المرافق
- العدد المشتق

facebook.com/elbacsaahel

التفسير الهندسي للنهايات:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ ⇐ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي موازي لمحور الفواصل ومعادلته $y=a$ بجوار $\pm\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ⇐ // // // $x=a$ // // التراتيب // // عمودي // // // //

مثال شامل:



مقاربات أفقية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

// عمودية: $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$

المشتقة:

$f'(x)=\frac{df}{dx}$ (بالنسبة لـ u و v).

$(u^n)'=n.u'.u^{n-1}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$(u.v)'=u'v+v'u$	$(u+v)'=u'+v'$	$(ku)'=k.u'$ (ثابت k)
$(\sin u)'=-u'.\cos u$	$(\cos u)'=u'.\sin u$	$(u\circ v)'=v'.u'(v)$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$	$(e^u)'=u'.e^u$
				$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

إتجاه التغير وجدول التغيرات:

1. نحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف (حتى بدون طلب لأننا سنحتاجها في جدول التغيرات)
2. نحسب المشتقة ثم ندرس إشارتها.

تذكير حول الإشارة:

$ax+b=0 \to ax=-b \to x=-\frac{b}{a}$

مثل إشارة a | عكس إشارة a | $-\infty$ | $-b/a$ | $+\infty$

$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow \Delta=b^2-4ac$

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
الحلول:	لا يوجد حلول	$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
الإشارة:	$-\infty$ ... $+\infty$: مثل a	$-\infty$ ... x_1 ... $+\infty$: مثل a / مثل a	$-\infty$ ... x_1 ... x_2 ... $+\infty$: مثل a / عكس a / مثل a
التحليل:		$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

- بسط = كسر = مقام
- بسط = 0
- مقام ≠ 0

⇐ القيم التي تعدم المقام هي قيم ممنوعة.

⇐ إشارة كسر هي إشارة البسط في (x) إشارة المقام

3) بعد دراسة إشارة المشتقة نحدد إتجاه التغير حيث:

- في المجال الذي تكون فيه $f'(x)>0$ ⇐ f متزايدة تماما على ذاك المجال.
- // // // $f'(x)<0$ ⇐ f متناقصة // // .

+ القيمة التي تنعدم من أجلها f هي قيمة حدية لـ f حيث $f'(x)=0$

4) جدول التغيرات: يكون على حسب إتجاه التغير مع الإستعانة بـ مجموعة التعريف والقيم الممنوعة

x	$-\infty$		b		c		d		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ↗		$\lim_{x\to b^-} f(x)$ ‖ $\lim_{x\to b^+} f(x)$	↗	$f(c)$	↘	$\lim_{x\to d^-} f(x)$ ‖ $\lim_{x\to d^+} f(x)$	↘	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

خارج مجال التعريف

مثال شامل:

بعد حساب النهايات والمشتقة وبعد دراسة إشارة المشتقة:

$D_f=]-\infty,b[\cup]b,d[$ → b و d قيمتين ممنوعتين.

$f(x)>0 \to x\in]-\infty,b[\cup]b,c[$

$f(x)<0 \to x\in]c,+\infty[$ ✱ $f'(x)=0 \to x=c$

ملاحظة بالنسبة للقيمة الحدية: $A(a, f(a))$ هي قيمة حدية للدالة f { $f(a) > f(x)$ ← النقطة A هي قيمة حدية كبرى للدالة f ، $f(a) < f(x)$ ← " " صغرى " "

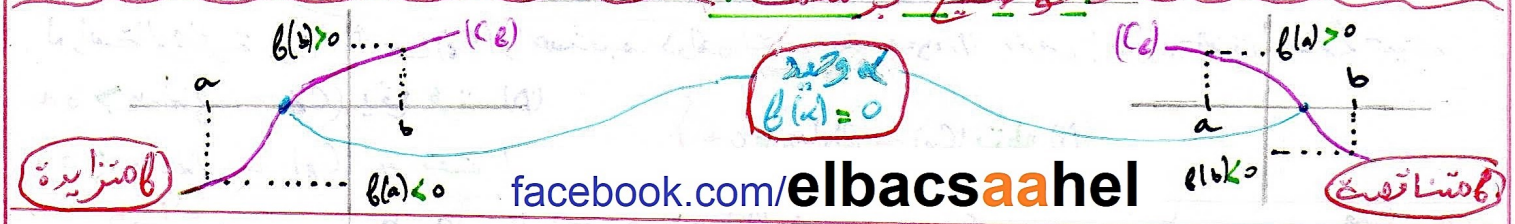
مبرهنة القيم المتوسطة:

تبيين أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $a < \alpha < b$

① f رتيبة ومستمرة تماما (متناقصة أو متزايدة) على المجال $[a, b]$ ② $f(a) \cdot f(b) < 0$ أي إما $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ أو $f(b) > 0$ و $f(a) < 0$

{ $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $a < \alpha < b$

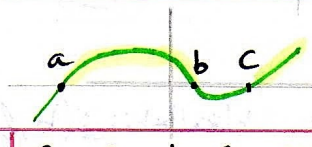
توضيح برسم:



facebook.com/elbacsaahel

إشارة دالة:

مثال: جدول الإشارة:



x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

← $f(x) > 0$ (f موجبة) معناه المنحنى (C_f) يقع فوق محور الفواصل

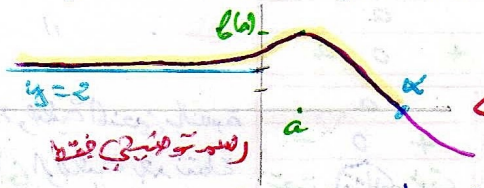
← $f(x) < 0$ (f سالبة) " " " تحت " "

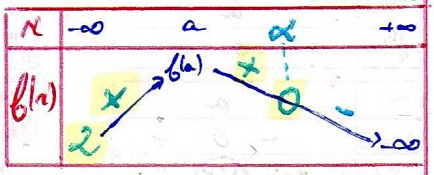
← ملاحظة هامة: يمكن استنتاج إشارة دالة إنطلاقا من جدول تغيراتها وبرهنة القيم المتوسطة

مثال: لدينا التغيرات الكامل بالدالة f ولدينا $f(x)=0$. $(\alpha > a)$ (a قيمة كيفية)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

← جدول الإشارة:





← بما أن f قيمة موجبة و f متزايدة ثم متناقصة إذا حيث $f(x)=0$ و 0 قيمة موجبة فإنه حتما f تقع فوق محور الفواصل على هذا المجال $]\alpha, +\infty[$ وبما أن f تبقى متناقصة بعد α مع $f(x)=0$ فإن f تقع تحت محور الفواصل على $]\alpha, +\infty[$

المقارب المائل:

لتكن الدالة: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

المنحنى C_f بجوار $\pm\infty$

← إثبات أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل معناه: $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

← وجود مستقيم مقارب مائل مع تعيين معادلته: $\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$ ومنه المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل.

المماس:

← معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نقطة التماس هي $(x_0, f(x_0))$ أو (x, y_{x_0})

الحالات الستة للمماس: في كل الحالات نبحث عن x_0 ثم نطبق القانون.

بعد إيجاد قيمة أو قيم x_0 نطبق القانون

- معادلة المماس عند النقطة ذات الترتيب y_0 ← نحل المعادلة $f(x) = y_0$
- " " الذي ميله أو معامل توجيهه هو a مثلا ← نحل المعادلة $f'(x_0) = a$
- " " يوازي مستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ ← " " $f'(x_0) = a$
- " " محور الفواصل ← " " $f'(x_0) = 0$
- " " يعامد مستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ ← " " $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$
- " " يشمل النقطة $A(\alpha, \beta)$ ← " " $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$

تذكير: لما $f(x)=0$ من أجل $x=e$ مثلا نستنتج أن النقطة $(e, f(e))$ هي قيمة حدية للمنحنى C_f كما نستنتج وجود مماس أفقي موازي لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e$

← أفقي موازي لمحور الفواصل لأن الميل الذي هو $f'(x)$ معدوم $f'(e)=0$ وميل محور الفواصل أيضا معدوم ومعناه هما متوازيان

لتكن $(\Delta): y=ax+b$ ذو المعادلة

خاصية + تقارب مائل:
- (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) ← نستنتج وجود مقارب مائل آخر ذو المعادلة $(\Delta'): y=ax-b$
- (Δ) مماس لـ (C_f) عند x_0 ← " " مماس آخر $(\Delta'): y=ax-b$ حيث $x_0'=-x_0$ و $f(x_0')=-f(x_0)$

خاصية + تناظر:
- (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) ← نستنتج وجود مقارب مائل آخر ذو المعادلة $(\Delta'): y=-ax+b$
- (Δ) مماس لـ (C_f) عند x_0 ← " " مماس آخر $(\Delta'): y=-ax+b$ حيث $x_0'=-x_0$ و $f(x_0')=f(x_0)$

وضعية منحنى بالنسبة لمستقيم:

لدراسة الوضعية بين المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $(\Delta): y=ax+b$ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ حيث:

- $f(x)-y>0$ ← (C_f) يقع فوق (Δ)
- $f(x)-y<0$ ← (C_f) " تحت (Δ)
- $f(x)-y=0$ ← (C_f) يتقاطع (Δ)

مثال:

- $f(x)-y>0 \rightarrow x\in]a,b[$
- $f(x)-y<0 \rightarrow x\in]b,c[$
- $f(x)-y=0 \rightarrow x=b \rightarrow (b,f(b))$ هي نقطة التقاطع

x	a		b		c
$f(x)-y$	$+$	$+$	0	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f)	(C_f) يتقاطع (Δ) في $(b,f(b))$	(C_f) تحت (Δ)	

نقطة إنعطاف:

$(a,f(a))$ هي نقطة الإنعطاف.

- المشتقة الأولى تنعدم و تغيّر من إشارتها ←
- " الثانية " و لا تغير " ←

x	a	
$f'(x)$	$+$	0 $-$

أو

x	a	
$f'(x)$	$-$	0 $+$

و

x	a	
$f''(x)$	$-$	0 $-$

أو

x	a	
$f''(x)$	$+$	0 $+$

x	a		
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	فوق	تقاطع	تحت

أو

x	a		
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	تحت	تقاطع	فوق

+ إذا كان المماس يخترق المنحنى ← عند دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمماس نجد أن الوضعية قبل نقطة التماس تتغالى الوضعية بعد نقطة التماس أي أنه في هذه الحالة تكون نقطة التماس هي نقطة إنعطاف

مركز التناظر: (α,β)

$f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$ أو $f(\alpha-x)+f(x)=2\beta$

محور التناظر: $x=\alpha$

$f(2\alpha-x)=f(x)$ أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

خطوات رسم منحنى دالة:

1. المستقيمات: المقاربات الأفقية والعمودية والمائلة + المماس
2. النقط: النقط الحدية (مماس أفقي عندها) + نقطة التماس + نقطة الإنعطاف + نقطتي التقاطع مع محور الفواصل والتراتيب
3. ثم نشطب جدول التغيرات والوضعية ونرسم بعناية المنحنى.

إيجاد نقطتي التقاطع مع محور الفواصل ومع محور التراتيب:

- مع محور الفواصل: نحل المعادلة $y=0$ أي $f(x)=0$ ← $(C_f)\cap(x'x)=(x_1,0)$
- " التراتيب: نعوض $x=0$ في عبارة $f(x)$ ← $(C_f)\cap(y'y)=(0,f(0))$

ملاحظة: يمكن أن تتواجد عدة نقط تقاطع كما أنه يمكن ألا تتواجد نقط تقاطع

رسم دالة انطلاقا من دالة أخرى: (g انطلاقا من f)

- $g(x)=f(x+a)+b \rightarrow$ بالانسحاب $\rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
- $g(x)=-f(-x) \rightarrow$ بالتناظر $\rightarrow$ مبدأ المعلم
- $g(x)=f(-x) \rightarrow$ بالتناظر $\rightarrow$ محور التراتيب
- $g(x)=-f(x) \rightarrow$ " $\rightarrow$ محور الفواصل
- $g(x)=|f(x)|$ ← $f(x)>0 \rightarrow g(x)=f(x)$ → منطبقان
- $g(x)=|f(x)|$ ← $f(x)<0 \rightarrow g(x)=-f(x)$ → بالتناظر محور الفواصل

موقع الباك ساهل
facebook.com/elbacsaahel

← القيمة المطلقة دوما موجبة ومنه $g(x)\geq 0$ أي منحنى دالة g يقع بأكمله فوق محور الفواصل ومنه g يطابق f كما f يقع فوق محور الفواصل $f(x)\geq 0$ و ينا ظر f بالنسبة لمحور الفواصل كما f يقع تحت محور الفواصل أي $f(x)\leq 0$

$g(x)=f(|x|)$ ← $x>0 \to g(x)=f(x)$ ← f و g متطابقان

$x<0 \to g(x)=f(-x)$ ⊕ $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ ← $g(-x)=g(x)$

g زوجية أي (C_g) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب وهنا فإن (C_g) ينطبق على (C_f) أي على المجال $]0,+\infty[$ و في المجال $]-\infty,0[$ متناظر الجزء المنطبق على (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب

المناقشة البيانية:

عبارة فيها m ← $f(x)=m$

① أولا: العبارة المعطاة: مناقشتها ← نعولها إلى الشكل:

② ثانيا: نقول: حلول المعادلة السابقة هو إيجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة: $(D_m): y=$ العبارة الموجودة

③ ثالثا: نلاحظ العبارة الموجودة هي حيث شكلها حيث: E هو عدد فيه m ولا يحتوي x

$f(x)=E$	$f(x)=ax+E$	$f(x)=Ex+b$
الميل: معدوم	الميل: غير معدوم و ثابت	الميل: غير معدوم و غير ثابت
← أفقية (ميل معدوم)	← مائلة (ميل ثابت)	← حوراتية (ميل متغير)
E ترتيبة أي نقطة من المستقيم	E ترتيبة نقطة تقاطع المستقيم مع محور التراتيب	E ميل المنحنى

أمثلة

$f(x)=m$ ← $a=0$ ← الميل	$f(x)=5$ ← $a=5$ ← الميل: ثابت	$f(x)=mx+3$ ← $a=m$ ← الميل متغير
$f(x)=7m-1$ ← $a=0$ ← الميل: معدوم	$f(x)=2x+8m-1$ ← $a=2$ ← الميل: ثابت	$f(x)=(m-9)x-2$ ← $a=m-9$ ← " "
$f(x)=e^m+8$ ← $a=0$ ← " "	$f(x)=7.x-\ln(m+4)$ ← $a=7$ ← " "	$f(x)=e^m x-1$ ← $a=e^m$ ← الميل متغير
$f(x)=\lvert 7-m\rvert$ ← $a=0$ ← " "	$f(x)=x+\lvert -m\rvert$ ← $a=1$ ← " "	$f(x)=\lvert m+2\rvert x$ ← $a=\lvert m+2\rvert$ ← " "

بعد إيجاد قيم E نستخرج m منه (نعيد قيم E المناقشة).

ملاحظة بالنسبة للمناقشة الدورانية: بعد تحويل العبارة المعطاة إلى $f(x)$ بدلالة m حيث الميل متغير، نقوم بإيجاد نقطة الدوران ولتكن $A(\alpha,\beta)$ مثلا حيث A هي النقطة التي يشملها جميع المستقيمات مهما كان ميلها ومنه إجرائيا ← A تحقق معادلة المستقيم (D_m) أي: $\beta=E.\alpha+b$

↳ $\alpha E+b-\beta=0$ ← ينعدم مثير حدود من الدرجة الأولى إذا انعدم حداه (المتغير هو m فقط)

(m إحدى قيم E هي E')

$$\begin{cases} \alpha E'=0 \to \alpha=0 \\ b-\beta=0 \to \beta=b \end{cases} \to A(\alpha=0;\beta=b)$$

← إذا كانت المناقشة من الشكل: $f(x)=f(m)$ ⇔ فيرجع للرياضيات ①


موقع الباك ساهل
@elbacsaahel
facebook.com/elbacsaahel

← القيمة الحدية هي حل مضاعف.

⚠ عدد الحلول، إشارة الحلول، حلان مختلفان في الإشارة، حلان متمايزان، حل وحيد، حل وحيد موجب، حلول سالبة ....

تذكير حول القيمة المطلقة:

$a=\lvert x\rvert$ ← $x>0 \to a=x$; $x<0 \to a=-x$	$\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \to \begin{cases} a=b \\ a=-b \end{cases}$	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ المتباينة المثلثية	$\lvert x\rvert=0 \to x=0$	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a.b\rvert=\lvert a\rvert.\lvert b\rvert$
$\lvert x\rvert=\sqrt{x^2}$	$\lvert x\rvert=\lvert -x\rvert$	$\lvert x\rvert\geq 0$ أي عدد			

$a<\lvert x\rvert<b \to x\in]-b,-a[\cup]a,b[$	$\lvert x\rvert>a \to x\in]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$	$\lvert x\rvert<a \to x\in]-a,+a[$

الدوال الأصلية (التكامل) :

بالاشتقاق ← $f(x) \to F(x)$ ← بالتكامل

F الدالة الأصلية لـ f معناه : $F(x) = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

لكل دالة f مجموعة غير منتهية من الدوال الأصلية حيث $f(x)$ دالتها الأصلية $F(x)+c$ مع c ثابت

f مستمرة على I فهذه f تقبل دالة أصلية على المجال I.

facebook.com/elbacsaahel

$f(x)$ دالتها الأصلية $F(x)+c$ ← بالتكامل

(في كل ما سيتم ذكره يجب إضافة c حيث c عدد ثابت)

الصفر 0 ← عدد ثابت c	عدد ثابت a مثلا ← ax	$f' \leftarrow f'' * f \leftarrow f'$
$\frac{u'}{u} = u'u^{-1} \leftarrow \ln\lvert u\rvert$	$u'e^u \leftarrow e^u$ و $e^u \leftarrow \frac{1}{u'}e^u$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \Leftrightarrow k.F \leftarrow k.f$ (k ثابت)
$u'u^m$ ← $m\neq -1$ ← $\frac{u^{m+1}}{m+1}$ ؛ $m=-1$ ← $\frac{u'}{u} = u'u^{-1}$ ← $\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u^m}$ ← $m\neq 1$ ← $\frac{u^{-m+1}}{-m+1}$ ؛ $m=1$ ← $\frac{u'}{u}$ ← $\ln\lvert u\rvert$	$u'\sqrt{u} \leftarrow \frac{2}{3}\sqrt{u^3}$ ؛ $\frac{u'}{\sqrt{u}} \leftarrow 2\sqrt{u}$

* يكفي تذكر الثلاثي الكامن بـ $u'u^m$ وتطبيقه على كل العبارات من الشكل: $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ، $\sqrt[3]{u}$ ، $\sqrt{u}$ ، $u'\sqrt{u}$ ، $\frac{u'}{u^m}$

$\sqrt{u} = \sqrt[2]{u} = u^{\frac{1}{2}}$ مع $\sqrt[a]{u} = u^{\frac{1}{a}}$ و $\frac{1}{u^a} = u^{-a}$ ... وهذا بتحويل هذه العبارات إلى الشكل $u'u^m$ علما أن $\sqrt[a]{u^b}$

كل هذه العبارات الموجودة في من الشكل $u'.u^m$ ← نطبق الثلاثي الكامن $u'u^m$

$\frac{u^{-m+1}}{-m+1}$ ← $\frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ ← $\frac{2}{3}\sqrt{u^3} = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ ← $\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} = \frac{3}{4}u^{4/3} = \frac{1}{\frac{4}{3}+1}u^{\frac{4}{3}+1}$ ← $2\sqrt{u} = 2u^{1/2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}u^{-\frac{1}{2}+1}$ ← $\frac{5}{6}\sqrt[6]{u^5} = \frac{5}{6}u^{5/6} = \frac{1}{\frac{5}{6}+1}u^{\frac{5}{6}+1}$ ←

وإذا كان الأس يساوي -1 أي $m=-1$ فإن $F(x)$ هي: $\ln\lvert u\rvert$

نستنتج:

$u'u^{-m}$	يمكن كتابتها $\frac{u'}{u^m}$
$u'u^{1/2}$	" " $u'\sqrt{u}$
$u'u^{1/2}$ ($u'=1$ مع)	" " $\sqrt{u} = \sqrt[2]{u}$
$u'u^{1/3}$ ($u'=1$ مع)	" " $\sqrt[3]{u}$
$u'u^{-1/2} = \frac{u'}{u^{1/2}}$	" " $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$u'.u^{\frac{1}{5}}$	" " $u'\sqrt[5]{u}$

← يمكن أن يكون u هو x أي أنه يجب كل الحالات $u'=1$ لكن نبقى نفس الطريقة ونفس النتيجة فقط $u=x$

← إذا طلب إيجاد c فإننا نستعمل ما أعطي لنا مثلا كأن يقول: أوجد الدالة الأصلية لـ f مع $F(1)=2$ إذن نستعمل $F(1)=2$ لإيجاد c وهذا بتعويض $x=1$ و $f(x)=2$ نتحصل كمعادلة ذات مجهول واحد نقط هو c

مثال: (بعد كتابة $F(x)=2x^2-3x+c$) مثلا و $F(2)=5$ ← $2(2)^2-3(2)+c=5$ ← $8-6+c=5$ ← $c=-3$ ← $F(x)=2x^2-3x-3$

التكامل بالتجزئة = تعيين دالة أصلية للدالة $f'.g$: $\int f'.g\,dx = f.g - \int g'.f\,dx$

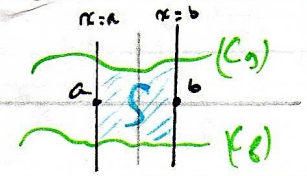
$\int_a^b f'.g\,dx = [f.g]_a^b - \int_a^b g'.f\,dx$

الحساب التكاملي : $b>a$ مع $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

خواص:

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)\,dx$	$f(x)>g(x) \to \int f(x)\,dx > \int g(x)\,dx$	$\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

الإساحات : مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) فوق (C_f) مع (C_g) والمستقيمات ذات المعادلات $x=a$ و $x=b$ ($a<b$ مع) هي:



الإساحة = $S = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

← إذا كانت المساحة محددة بمنحنى (C_f) والمستقيمات $y=k$ و $x=a$ و $x=b$ ($b>a$) :

① إذا كان (C_f) فوق المستقيم فإن: $S = \int_a^b f(x) - y\,dx$ ② إذا كان (C_f) تحت المستقيم $y=k$ فإن $S = \int_a^b y - f(x)\,dx$

ملاحظة:

$0^+ = 0,00\ldots01 \times 10^{-\infty}$ $\quad x \xrightarrow{>} 0 \Leftrightarrow x = 0^+$

$0^- = -0,00\ldots01 \times -10^{-\infty}$ $\quad x \xrightarrow{<} 0 \Leftrightarrow x = 0^-$

a ليكن عدد حقيقي: $\quad x \xrightarrow{>} a \Leftrightarrow x = a + 0^+$

$x \xrightarrow{<} a \Leftrightarrow x = a - 0^+ \ ; \ a + 0^-$

مثال: $x \xrightarrow{>} 5 \Leftrightarrow x = 5 + 0^+ = 5,00\ldots01$ $\quad x \xrightarrow{<} 2 \Leftrightarrow x = 1,99\ldots99$

$x \xrightarrow{>} -4 \Leftrightarrow x = -4 + 0^+ = -3,99\ldots99$ $\quad x \xrightarrow{<} -7 \Leftrightarrow x = -7 + 0^- = -7,00\ldots01$

$\sqrt{a} = a^{1/2}$ $\quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ $\rightarrow$ مثل: $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$ $\quad \sqrt[5]{a} = a^{1/5}$

$\frac{\text{عدد موجب}}{+0} = +\infty$ $\quad \frac{\text{عدد موجب}}{-\infty} = 0^-$ $\quad \frac{\text{عدد موجب}}{0^+} = +\infty$ $\quad \frac{\text{عدد موجب}}{0^-} = -\infty$ $\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{شكل}$

التعريف ببعض الدوال وخصائصها

• **دالة كثير حدود:** لا يوجد فيها كسور أو جذور أو $|x|$ أو $\ln$

أمثلة: $f(x) = 7x^2 + 5$ $\quad g(x) = -28x^7 - 4x^3 + x^2 - 2$

$h(x) = x^9 - 8$ $\quad M(x) = x^{100} - 7000$ $\quad N(x) = (5x^2 - 7)(3x - 2)$

نهاية دالة كثير حدود عند $\pm\infty$: هي نهاية الأعلى حد عند $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} 8x^3 - 5x^2 + 7 = \lim_{x \to +\infty} 8x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

(الأعلى درجة)

مع العلم أن: $\lim_{x \to -\infty} x^n$

- n زوجي: $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- n فردي: $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

• **دالة ناطقة:** عبارة عن دالة كثير حدود قسمة دالة كثير حدود أخرى. (دالة الكسر)

أمثلة: $f(x) = \frac{5x^2 - 7}{8x + 3}$ $\quad g(x) = \frac{6x^2 + 8x - 2}{7x^5 - 8x^4 - x - 1}$

نهاية دالة ناطقة عند $\pm\infty$: هي نهاية أعلى حد في البسط على أعلى حد في المقام.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{6x^3 - 8x^2 + 7}{8x^5 + 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{6x^3}{8x^5}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{6}{8x^2}\right) = \frac{6}{(+\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{9x^3 - 6x + 2}{-x + 2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{9x^3}{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} (-9x^2) = -9(+\infty)^2 = -\infty$$

دالة جذر: دالة كثيرة حدود داخل الجذر (+ الخاصية)

أمثلة:

$f(x) = \sqrt{5x^3 - 7x + 8}$ $\quad g(x) = \sqrt{-8x^2 + 4}$

نهاية دالة جذر عند $-\infty$: في حدود نهاية x

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-9x^2 + 4} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{-9x^2} = \sqrt{-9(-\infty)^2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

مع العلم أن: $\sqrt{+\infty} = +\infty$ و $\sqrt{-\infty}$ حالة عدم التعيين

مشتقة الدوال السابقة:

① كثيرة حدود:

$(u+v)' = u' + v' \qquad (u \times v)' = u'v + v'u$

$(k \cdot u)' = k\,u' \quad$ (حيث k عدد) $\qquad u^m = m \cdot u' \cdot u^{m-1}$

② دالة ناطقة:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

③ دالة جذر:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

نهاية الدوال السابقة عند عدد:

النهاية عند عدد ← نوعوض بالعدد بدل المتغير

$$\lim_{x \to 2} \left(3x^2 - 6x + 2\right) = 3(2)^2 - 6(2) + 2 = 26$$

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{5x - 48}{7x^2 - 4x + 2}\right) = \frac{5(3) - 48}{7(3)^2 - 4(3) + 2} = -\frac{33}{65}$$

$$\lim_{x \to -4} \left(\frac{8x^3 - 7}{x + 4}\right) = \frac{-519}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{6x^4 - 2} = \lim_{x \to -2} \sqrt{6x^4} = \sqrt{6(-2)^4} = \sqrt{96}$$

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{-7x^5 + 8x^3 - x + 97} = \lim_{x \to 5} \sqrt{-7x^5} = \sqrt{-7(5)^5} = \sqrt{-21875}$$

ن.ح