# قواعد أساسية في المتتاليات العددية

**I- المتتالية الحسابية :**

**1. العلاقة التراجعية :**

$$u_{n+1} = u_n + r$$

**2. عبارة الحد العام :**

$$u_n = u_p + (n-p)r \; ; \; u_n = u_0 + nr \; ; \; u_n = u_1 + (n-1)r$$

**3. الوسط الحسابي :**

إذا كانت الأعداد $a, b, c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية ، فإنّ : $a + c = 2b$

**تنبيه** : لحل مسائل الوسط الحسابي ، ننطلق دائما من معادلة المجموع $(a + b + c = \cdots)$ وتعويضها بالمعادلة $(3b = \cdots)$ لتعيين قيمة $b$ ، ثمّ نعوّض $b$ في معادلة الجداء $(a \times b \times c = \cdots)$ فنحصل على معادلة من الشكل $(a \times c = \cdots)$ ، ثمّ نكتب $a$ و $c$ بدلالة $b$ و $r$ ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول $r$ من الشكل $[(b-r)(b+r) = \cdots]$ التي تكافئ $(b^2 - r^2 = \cdots)$ ، ونعيّن قيمتي $r$ (الموجبة والسالبة) مع التركيز جيّدا على طبيعة المتتالية المعطاة في السؤال (متزايدة أم متناقصة) لمعرفة أي القيمتين نأخذ، ثمّ نحسب الحدّين $a$ و $c$.

**مثال 1 :**

عيّن الحدود الثلاثة الأولى $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ لمتتالية حسابية حيث : $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$

$u_0 + u_1 + u_2 = 3 \Rightarrow 3u_1 = 3 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1}$

$u_0 \times \underbrace{u_1}_{=1} \times u_2 = -24 \Rightarrow \underbrace{u_0}_{u_1 - r} \times \underbrace{u_2}_{u_1 + r} = -24 \Rightarrow (1-r)(1+r) = -24 \Rightarrow 1 - r^2 = -24 \Rightarrow r^2 = 25$

بما أنّ السؤال لم يحدّد طبيعة المتتالية $(u_n)$ ، فإنّ $r = -5$ أو $r = 5$

- $r = -5 \Rightarrow u_0 = 1 - (-5) = 6 \; ; u_2 = 1 + (-5) = -4 \Rightarrow \boxed{(u_0, u_1, u_2) = (6,1,-4)}$
- $r = 5 \Rightarrow u_0 = 1 - 5 = -4 \; ; u_2 = 1 + 5 = 6 \Rightarrow \boxed{(u_0, u_1, u_2) = (-4,1,6)}$

**التحقيق :**

$u_0 + u_1 + u_2 = 6 + 1 - 4 = \boxed{3} \; ; \; u_0 \times u_1 \times u_2 = 6 \times 1 \times (-4) = \boxed{-24}$

**مثال 2 :**

عيّن الحدود $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ لمتتالية حسابية **متناقصة** حيث : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

$u_1 + u_2 + u_3 = 24 \Rightarrow 3u_2 = 24 \Rightarrow \boxed{u_2 = 8}$

$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \Rightarrow u_1^2 + u_3^2 = 210 - 64 \Rightarrow (8-r)^2 + (8+r)^2 = 146 \Rightarrow r^2 = 9$

بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة ، فإنّ $r = -3$ ، منه : $\boxed{u_1 = u_2 - r = 11}$ و $\boxed{u_3 = u_2 + r = 5}$

**التحقيق :**

$u_1 + u_2 + u_3 = 11 + 8 + 5 = \boxed{24} \; ; 11^2 + 8^2 + 5^2 = 121 + 64 + 25 = \boxed{210}$

**4. حساب المجاميع :**

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

**مثال :**

$$u_0 = 1 \; ; r = 3 \; ; S = u_0 + \cdots + u_9 = \frac{10}{2}\left(u_0 + \underbrace{u_9}_{u_0 + 9r}\right) = 5(1 + 28) = 5 \times 29 = 145$$

**II- المتتالية الهندسية :**

**1. العلاقة التراجعية :**

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

**2. عبارة الحد العام :**

$$v_n = v_p \times q^{n-p} \; ; \; v_n = v_0 \times q^n \; ; \; v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

**3. الوسط الهندسي :**

إذا كانت الأعداد $a, b, c$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية ، فإنّ : $a \times c = b^2$

**تنبيه** : لحل مسائل الوسط الهندسي ، ننطلق دائما من معادلة الجداء $(a \times b \times c = \cdots)$ وتعويضها بالمعادلة $(b^3 = \cdots)$ لتعيين قيمة $b$ ، ثمّ نعوّض $b$ في معادلة المجموع $(a + b + c = \cdots)$ فنحصل على معادلة من الشكل $(a + c = \cdots)$ ، ثمّ نكتب $a$ و $c$ بدلالة $b$ و $q$ ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول $q$ من الشكل $\left[\frac{b}{q} + bq = \cdots\right]$ التي تكافئ $bq^2 - \cdots q + b = 0$ (نضرب طرفي المعادلة في $q$)، ونعيّن قيمتي $q$ مع التركيز جيّدا على طبيعة المتتالية المعطاة في السؤال [رتيبة $(q > 0)$ ، غير رتيبة $(q < 0)$ ، متزايدة $(q > 1)$ ، متناقصة $(1 > q > 0)$] وإشارة حدودها لمعرفة أي القيمتين نأخذ، ثمّ نحسب الحدّين $a$ و $c$.

**مثال 1 :**

عيّن الحدود $v_1$ ، $v_2$ ، $v_3$ لمتتالية هندسية **متزايدة ، حدودها موجبة** حيث : $\begin{cases} v_1 \times v_3 = 256 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 56 \end{cases}$

$v_1 \times v_3 = 256 \Rightarrow v_2^2 = 256 \Rightarrow \boxed{v_2 = 16}$ (لأنّ حدود المتتالية $(v_n)$ موجبة)

$v_1 + \underbrace{v_2}_{16} + v_3 = 56 \Rightarrow \underbrace{v_1}_{\frac{u_2}{q}} + \underbrace{v_3}_{u_2.q} = 40 \Rightarrow \frac{16}{q} + 16q = 40 \Rightarrow 16q^2 - 40q + 16 = 0$

$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{q = 2}$ (لأنّ المتتالية $(v_n)$ متزايدة) $\Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{v_2}{q} = 8 \; ; v_3 = v_2.q = 32}$

**التحقيق :**

$v_1 \times v_3 = 8 \times 32 = \boxed{256}$ ; $v_1 + v_2 + v_3 = 8 + 16 + 32 = \boxed{56}$

**مثال 2 :**

$(v_n)$ متتالية هندسية حيث : $\begin{cases} v_1 \times v_5 = 16 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \end{cases}$

اثبت أنّ $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ، ثمّ احسب الحدود $v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5$

$v_1 \times v_5 = \frac{v_3}{q^2} \times v_3.q^2 = v_3^2$

$v_1 \times v_5 = 16 \Rightarrow v_3^2 = 16 \Rightarrow v_3 = 4$ أو $v_3 = -4$

- $v_3 = 4 : \; v_2 + v_3 + v_4 = 6 \Rightarrow v_2 + v_4 = 2 \Rightarrow \frac{v_3}{q} + v_3.q = 2 \Rightarrow \frac{4}{q} + 4q - 2 = 0$
  $\Rightarrow 4q^2 - 2q + 4 = 0 \Rightarrow 2q^2 - q + 2 = 0 \; ; \; \Delta = -15$ (حالة مرفوضة)
- $v_3 = -4 : \; v_2 + v_3 + v_4 = 6 \Rightarrow v_2 + v_4 = 10 \Rightarrow \frac{v_3}{q} + v_3.q = 10 \Rightarrow -\frac{4}{q} - 4q - 10 = 0$
  $\Rightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0 \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$ أو $q = -2$
  - ✓ $q = -\frac{1}{2} : v_1 = \frac{v_3}{q^2} = -16 \; ; \; v_2 = \frac{v_3}{q} = 8 \; ; \; v_3 = -4 \; ; \; v_4 = v_3.q = 2 \; ; \; v_5 = v_3.q^2 = -1$
  - ✓ $q = -2 : v_1 = \frac{v_3}{q^2} = -1 \; ; \; v_2 = \frac{v_3}{q} = 2 \; ; \; v_3 = -4 \; ; \; v_4 = v_3.q = 8 \; ; \; v_5 = v_3.q^2 = -16$

**4. حساب المجاميع :**

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}\right) = v_p\left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$$

$$v_1 + \cdots + v_n = v_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = v_1\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

**5. حساب الجداءات :**

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times v_0.q^2 \times \ldots \times v_0.q^n = v_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n} = v_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

**III- المتتالية المشتملة على الدالة الأسّية أو اللوغاريتمية :**

**تنبيه** : دراسة هذا النوع من المتتاليات يتطلب معرفة جيّدة بخواص الدالتين الأسّية واللوغاريتمية ، فراجعها.

**مثال 1 :**

$(u_n)$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$ln\,u_3 + lnu_4 = 5 \;;\; lnu_3 - ln\,u_4 = -1$$

1. عيّن أساس المتتالية $(u_n)$ و حدها الأول $u_1$.
2. أكتب $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.

$(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = ln\,u_{n+1} - 2ln\,u_n$

3. أثبت أن $(v_n)$ متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4. احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

**1. تعيين أساس المتتالية $(u_n)$ و حدها الأول $u_1$**

$$lnu_3 - ln\,u_4 = -1 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_3}{u_4}\right) = -1 \Rightarrow \frac{u_3}{u_4} = e^{-1} \Rightarrow \frac{u_4}{u_3} = e \Rightarrow \boxed{q = e}$$

$$lnu_3 + \ln u_4 = 5 \Rightarrow ln(u_1.e^2) + ln(u_1.e^3) = 5 \Rightarrow \ln u_1 + \ln e^2 + \ln u_1 + \ln e^3 = 5$$

$$\Rightarrow 2\ln u_1 + 5 = 5 \Rightarrow 2\ln u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1}$$

**2. كتابة $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم حساب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$**

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = e^{n-1}}$$

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = 1 \times e \times \ldots \times e^{n-1} = e^{1+2+\cdots+n-1} \Rightarrow \boxed{P_n = e^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

**3. اثبات أنّ $(v_n)$ متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

$$v_{n+1} = ln\,u_{n+2} - 2ln\,u_{n+1} = ln\,(u_{n+1}.e) - 2ln\,(u_n.e) = ln\,u_{n+1} + \ln e - 2ln\,u_n - 2\ln e$$
$$= ln\,u_{n+1} - 2ln\,u_n - 1 \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = v_n - 1}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $r = -1$ وحدّها الأول $v_1 = ln\,u_2 - 2ln\,u_1 = \ln e - 2\ln 1 = 1$

$$v_n = v_1 + (n-1)r \Rightarrow \boxed{v_n = 2 - n}$$

**4. حساب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$**

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(1 + 2 - n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}(3 - n)}$$

**مثال 2 :**

$(u_n)$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 30e \\ \ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

1. عيّن $u_1$ و $q$ أساس المتتالية $(u_n)$
2. عبّر عن $u_n$ بدلالة $n$
3. احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
4. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$
   أ. اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها $r$
   ب. عيّن العدد الطبيعي $n$ حيث : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3$.

**1. تعيين $u_1$ و$q$ أساس المتتالية $(u_n)$**

$$\ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \Rightarrow \ln(u_4) - \ln(u_2) = 2\ln 3 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_4}{u_2}\right) = 2\ln 3$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_2.q^2}{u_2}\right) = 2\ln 3 \Rightarrow \ln q^2 = 2\ln 3 \Rightarrow 2\ln q = 2\ln 3 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

$$u_1 + u_3 = 30e \Rightarrow u_1 + u_1.q^2 = 30e \Rightarrow 10u_1 = 30e \Rightarrow \boxed{u_1 = 3e}$$

**2. عبارة $u_n$ بدلالة $n$**

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow u_n = 3e.3^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 3^n.e}$$

**3. حساب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$**

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{3e}{2}(3^n - 1)}$$

**4. $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$**

**أ. كتابة $v_n$ بدلالة $n$**

$$v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1}) = \ln(3^{n+2}.e) + \ln(3^{n+1}.e) = \ln(3^{n+2}) + \ln(e) + \ln(3^{n+1}) + \ln(e)$$

$$v_n = (n+2)\ln 3 + (n+1)\ln 3 + 2 \Rightarrow \boxed{v_n = (2n+3)\ln 3 + 2}$$

**بيان أنّ المتتالية $(v_n)$ حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها $r$**

$$v_{n+1} = (2n+5)\ln 3 + 2 = (2n+3)\ln 3 + 2 + 2\ln 3 = v_n + 2\ln 3$$

منه ، نستنتج أنّ المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $\boxed{r = 2\ln 3}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = 3\ln 3 + 2}$

**ب. تعيين العدد الطبيعي $n$ حيث : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3$**

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 12 + 48\ln 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[3\ln 3 + 2 + (2n+3)\ln 3 + 2] = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[2(n+3)\ln 3 + 4] = 12 + 48\ln 3$$

$$\Rightarrow (n+1)[(n+3)\ln 3 + 2] = 12 + 48\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} 2(n+1) = 12 \\ (n+1)(n+3) = 48 \end{cases} \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

**IV- دراسة تغيّرات متتالية وتقاربها :**

**لدراسة تغيّرات متتالية عددية ، نتبع إحدى الطرق التالية :**

1. ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ونستنتج ما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة} \end{cases}$
2. نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1 (لمّا $u_n > 0$) ونستنتج ما يلي : $\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة} \end{cases}$
3. ندرس تغيّرات الدالة $f(n) = u_n$ على المجال $[0; +\infty[$ ونستنتج تغيّرات المتتالية $(u_n)$ (نفس التغيّرات)

**لبيان أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة ، نتبع إحدى الطرق التالية :**

1. نبيّن أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$
2. نبيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى $(u_n < M)$ ومتزايدة
3. نبيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأسفل $(u_n > m)$ ومتناقصة

**جدول توضيحي يبيّن العلاقة بين أساس المتتالية وتغيّراتها**

| المتتالية الحسابية | | المتتالية الهندسية | |
|---|---|---|---|
| الأساس $r$ | المتتالية $(u_n)$ | الأساس $q$ | المتتالية $(v_n)$ |
| $r > 0$ | متزايدة | $q > 1$ | متزايدة |
| $r < 0$ | متناقصة | $0 < q < 1$ | متناقصة |
| $r = 0$ | ثابتة | $q = 1$ | ثابتة |
| | | $q < 0$ | غير رتيبة |

**V- الاستدلال بالتراجع :**

لبيان أنّ خاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، نستعمل الاستدلال بالتراجع باتباع الخطوات التالية :

1. **تحقيق التراجع :** نتحقق أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n = n_0$
2. **فرض التراجع :** نفرض أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n$
3. **برهان التراجع :** نبرهن أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n + 1$

**مثال :**

$(u_n)$ متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335$ ، حيث $\alpha$ عدد حقيقي

1. عيّن العدد الحقيقي $\alpha$ حيث تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتة
2. نضع : $\alpha = 2009$
   أ. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \leq 2010$
   ب. بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$. ماذا تستنتج ؟

**1. تعيين العدد الحقيقي $\alpha$ حيث تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتة**

المتتالية $(u_n)$ ثابتة يعني $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ، منه $\alpha = \frac{5}{6}\alpha + 335$ أي $\alpha = 335 \times 6 = 2010$

**$\alpha = 2009$ .2**

**أ. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \leq 2010$**

تحقيق التراجع : $u_0 \leq 2010$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 2009$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $u_n \leq 2010$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $u_{n+1} \leq 2010$

$$u_n \leq 2010 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n \leq \frac{5}{6}(2010) \Rightarrow \frac{5}{6}u_n \leq 1675 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n + 335 \leq 2010 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2010$$

**ب. بيان أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n + 335 - u_n = 335 - \frac{1}{6}u_n = \frac{2010 - u_n}{6}$$

بما أنّ $u_n \leq 2010$ ، فإنّ $2010 - u_n \geq 0$ ، منه المتتالية $(u_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$

**الاستنتاج** : المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى ومتزايدة ، فهي إذن متقاربة.