قواعد أساسية في الدوال الأصلية والحساب التكاملي

I- الدوال الأصلية :

تعريف :
لتكن f دالة عددية معرّفة على مجال I. نقول إنّ الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا تحقّق الشرطان التاليان :

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- من أجل كل $x \in I$: $F'(x) = f(x)$

خواص :

- كل دالة مستمرة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I ، فإنّ جميع الدوال الأصلية للدالة f معرّفة على I بما يلي :
  $x \mapsto F(x) + k \; ; k \in \mathbb{R}$
- توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقّق الشرط : $F(x_0) = y_0$ ، حيث $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$
- إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على الترتيب على المجال I ، فإنّ :
  - ✓ $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I
  - ✓ kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :

الدالة $f(x)$	الدالة الأصلية $F(x)$	المجال I
0	$c \, , c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
k	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \, , n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n} \, , n \neq 1$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية :

الدالة $f(x)$	الدالة الأصلية $F(x)$
$u' + v'$	$u + v + c$
$u'v + uv'$	$uv + c$
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} - c$
$u'.u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
$u'e^u$	$e^u + c$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

أمثلة على حساب الدوال الأصلية :

المجموعة الأولى :

1) $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow \boxed{F(x) = x^2 + x + c}$

2) $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1 \Rightarrow F(x) = 10\left(\frac{x^5}{5}\right) + 6\left(\frac{x^4}{4}\right) - x + c = \boxed{2x^5 + \frac{3}{2}x^4 - x + c}$

3) $f(x) = (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + c}$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 \Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + c}$

5) $f(x) = -\frac{4}{3x^5} = -\frac{4}{3}x^{-5} \Rightarrow F(x) = -\frac{4}{3}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right) + c = \boxed{\frac{1}{3x^4} + c}$

6) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c}$

7) $f(x) = \sin x - 2\cos x \Rightarrow \boxed{F(x) = -\cos x - 2\sin x + c}$

المجموعة الثانية : من الشكل $u'.u^n$

1) $f(x) = \underbrace{3}_{u'}\underbrace{(3x+1)}_{u}^4 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{(3x+1)^5}{5} + c}$

2) $f(x) = 16(4x-1)^3 = 4 \times \underbrace{4}_{u'}\underbrace{(4x-1)}_{u}^3 \Rightarrow F(x) = 4\frac{(4x-1)^4}{4} + c = \boxed{(4x-1)^4 + c}$

3) $f(x) = (2x+7)^6 = \frac{1}{2} \times \underbrace{2}_{u'}\underbrace{(2x+7)}_{u}^6 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+7)^7}{7} + c = \boxed{\frac{(2x+7)^7}{14} + c}$

4) $f(x)=\underbrace{(6x-2)}_{u'}\underbrace{(3x^2-2x+3)^5}_{u}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}+c}$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4=-\left[\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{u'}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}_{u}\right]\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5+c}$

6) $f(x)=\underbrace{\sin x}_{u}.\underbrace{\cos x}_{u'}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+c}$

المجموعة الثالثة : من الشكل $\frac{u'}{u^2}$

1) $f(x)=\frac{4}{(1+4x)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{1+4x}+c}$

2) $f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}=3\frac{2}{(2x+1)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{3}{2x+1}+c}$

3) $f(x)=\frac{1}{(4x+3)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{(4x+3)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{4(4x+3)}+c}$

4) $f(x)=\frac{-1}{(2-x)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{2-x}+c}$

5) $f(x)=\frac{2}{(4-3x)^2}=-\frac{2}{3}\times\frac{-3}{(4-3x)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow F(x)=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4-3x}\right)=\boxed{\frac{2}{3(4-3x)}+c}$

6) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}+c}$

7) $f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}=2\times\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{2}{x^2-5x+6}+c}$

8) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{\sin x}+c}$

9) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{\cos x}+c}$

المجموعة الرابعة : من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{3x+2}}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow \sqrt{u}\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=2\sqrt{3x+2}+c}$

2) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2-5x}}=-\frac{2}{5}\times\frac{-5}{\sqrt{2-5x}}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow \sqrt{u}\end{matrix}\Rightarrow F(x)=-\frac{2}{5}\times 2\sqrt{2-5x}+c=\boxed{-\frac{4}{5}\sqrt{2-5x}+c}$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2x-3}}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow \sqrt{u}\end{matrix}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2x-3}+c=\boxed{\sqrt{2x-3}+c}$

4) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow \sqrt{u}\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=2\sqrt{x^2+x+1}+c}$

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow \sqrt{u}\end{matrix}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2-1}+c=\boxed{\sqrt{x^2-1}+c}$

6) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow \sqrt{u}\end{matrix}\Rightarrow \boxed{F(x)=2\sqrt{2+\sin x}+c}$

المجموعة الخامسة : من الشكل $\frac{u'}{u}$

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\ln|x|+c}$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+c}$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow \boxed{F(x)=7\ln|x|+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}+c}$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}\Rightarrow \boxed{F(x)=\ln|3x-4|+c}$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1};I=]-\infty;-1[\ \Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{x+1}_{<0}\right|+c=\boxed{\ln(-x-1)+c}$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1};I=]-1;+\infty[\ \Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(x+1)+c}$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4};I=]-\infty;-2[\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{x^2-4}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(x^2-4)+c}$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x-5};I=[2;+\infty[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\underbrace{3x-5}_{>0}\right|+c=\boxed{\frac{1}{3}\ln(3x-5)+c}$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2+2x+2}_{>0}\right|+c$

$=\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+c}$

10) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1};I=]-1;1[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2-1}_{<0}\right|+c=\boxed{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+c}$

11) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x};I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{\sin x}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(\sin x)+c}$

12) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x};I=]1;+\infty[\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{\ln x}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(\ln x)+c}$

13) $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\sin x}{\cos x};I=\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\Rightarrow F(x)=-\ln\left|\underbrace{\cos x}_{<0}\right|+c=\boxed{-\ln(-\cos x)+c}$

المجموعة السادسة : من الشكل $u'.e^u$

1) $f(x)=\frac{1}{4}e^x\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{4}e^x+c}$

2) $f(x)=e^{-x}=-(-e^{-x})\Rightarrow \boxed{F(x)=-e^{-x}+c}$

3) $f(x)=e^{2x+3}=\frac{1}{2}(2e^{2x+3})\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c}$

4) $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}(2xe^{x^2})\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+c}$

5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u\end{matrix}\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{e^x+1}_{>0}\right|+c=\boxed{F(x)=\ln(e^x+1)+c}$

II- الحساب التكاملي :

1. تعريف :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a;b]$. تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. خواص التكامل :

- **الخطّية :**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ ; k \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- **علاقة شال :**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. التكامل والترتيب :

$$\forall x \in [a;b]: f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\forall x \in [a;b]: f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

4. القيمة المتوسطة :

- لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

- إذا وُجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل $x \in [a;b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ فإنّ :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5. المكاملة بالتجزئة :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث تكون f' و g' مستمرتين على المجال $[a;b]$

$$\int_a^b f'(x).g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

أمثلة على الحساب التكاملي :

1) $\int_0^3 (x-4)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_0^3 = \frac{9}{2} - 12 = \boxed{-\frac{15}{2}}$

2) $\int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[x^2 - x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(4 - 2 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 1 - 1) = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$

3) $\int_{-1}^1 \frac{2}{(2x+3)^2}dx = \left[-\frac{1}{2x+3}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{5} - (-1) = -\frac{1}{5} + 1 = \boxed{\frac{4}{5}}$ $\left(\frac{u'}{u^2}$ من الشكل$\right)$

4) $\int_2^4 \frac{dx}{(4-3x)^2} = -\frac{1}{3}\int_2^4 \frac{-3}{(4-3x)^2}dx = -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4-3x}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}}$

5) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{-2}{\sqrt{4-2x}}dx = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{4-2x}\right]_1^{-1} = \left[\sqrt{4-2x}\right]_{-1}^{1} = \boxed{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

6) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \left[\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|\right]_0^2 = [\ln(x+1)]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \boxed{\ln 3}$

7) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx = 3\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x+2}dx = 3\left[\ln\left|\underbrace{x+2}_{<0}\right|\right]_{-4}^{-3} = 3[\ln(-x-2)]_{-4}^{-3} = 3(\ln 1 - \ln 2) = \boxed{-3\ln 2}$

8) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \left[x+\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_1^2 = 3+\ln 2-3 = \boxed{\ln 2}$

9) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x-\ln|2-x|-4\ln|x+2|\right]_3^4$

$= (1-\ln 2-4\ln 6)-\left(\frac{3}{4}-\ln 1-4\ln 5\right) = \boxed{\frac{1}{4}-\ln 2-4\ln 6+4\ln 5}$

10) $\int_2^5 -e^{-x}dx = [e^{-x}]_2^5 = \boxed{e^{-5}-e^{-2}}$

11) $\int_2^1 (e^{2x}+2e^x-3)dx = -\int_1^2 (e^{2x}+2e^x-3)dx = -\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-3x\right]_1^2$

$= -\left(\frac{1}{2}e^4+2e^2-6\right)+\left(\frac{1}{2}e^2+2e-3\right) = \boxed{-\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2+2e+3}$

12) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x-3)dx = \left[\frac{(e^x-3)^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \frac{49}{2}-0 = \boxed{\frac{49}{2}}$ $(u'.u$ من الشكل$)$

13) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx = -\int_0^1 -e^{-x}(e^{-x}-2)dx = -\left[\frac{(e^{-x}-2)^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{-\frac{(e^{-1}-2)^2}{2}+\frac{1}{2}}$

14) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx = -\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\ln(1-x)\,dx = -\left[\frac{\ln^2|1-x|}{2}\right]_{-1}^0 = 0+\frac{\ln^2(2)}{2} = \boxed{\frac{\ln^2(2)}{2}}$

15) $\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$= 2+\left(-\frac{3}{2}+2\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^2 x\,dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

17) $\int_{-2}^0 (x+3)e^x dx\,;u = x+3 \Rightarrow u' = 1\,;v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int_{-2}^0 (x+3)e^x dx = [(x+3)e^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^x dx = [(x+3)e^x]_{-2}^0 - [e^x]_{-2}^0 = [(x+2)e^x]_{-2}^0 = \boxed{2}$

18) $\int_0^{\pi} (x+1)\sin x\,dx\,;u = x+1 \Rightarrow u' = 1\,;v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$\int_0^{\pi} (x+1)\sin x\,dx = [-(x+1)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\,dx = [-(x+1)\cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi}$

$= \boxed{\pi+2}$

19) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}dx\,;u = x \Rightarrow u' = 1\,;v' = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^{\pi} -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{15}}$

20) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx\,;u = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x(x+1)}\,;v' = 1 \Rightarrow v = x$

$\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - [\ln|x+1|]_1^2$

$= 2\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - \ln 3 = \boxed{4\ln 2 - 3\ln 3}$

21) $\int_{-1}^0 (2x^2+3x)e^{-x}dx\,;u_1 = 2x^2+3x \Rightarrow u_1' = 4x+3\,;v_1' = e^{-x} \Rightarrow v_1 = -e^{-x}$

$\underbrace{\int_{-1}^0 (2x^2+3x)e^{-x}dx}_{I} = -[(2x^2+3x)e^{-x}]_{-1}^0 - \underbrace{\int_{-1}^0 -(4x+3)e^{-x}dx}_{J}$

$u_2 = 4x+3 \Rightarrow u_2' = 4\,;v_2' = -e^{-x} \Rightarrow v_2 = e^{-x}$

$J = [(4x+3)e^{-x}]_{-1}^0 - 4\int_{-1}^0 e^{-x}dx = [(4x+3)e^{-x}]_{-1}^0 + 4[e^{-x}]_{-1}^0 = 7 - 3e$

$I = -[(2x^2+3x)e^{-x}]_{-1}^0 - (7-3e) = -e - 7 + 3e = \boxed{2e-7}$

22) $\int_1^e (\ln x)^2 dx\,;u_1 = (\ln x)^2 \Rightarrow u_1' = \frac{2\ln x}{x}\,;v_1' = 1 \Rightarrow v_1 = x$

$\underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{I} = [x(\ln x)^2]_1^e - 2\underbrace{\int_1^e \ln x\,dx}_{J}$

$u_2 = \ln x \Rightarrow u_2' = \frac{1}{x}\,;v_2' = 1 \Rightarrow v_2 = x$

$J = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$

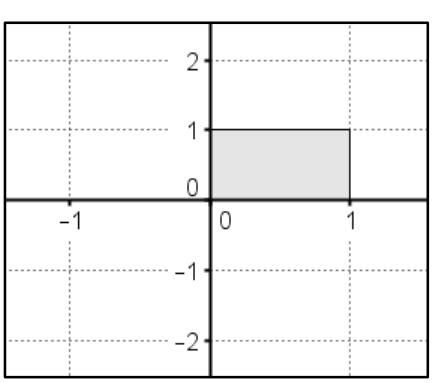
$I = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 = \boxed{e-2}$

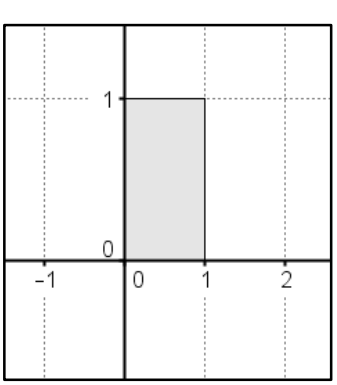
III- حساب المساحات :

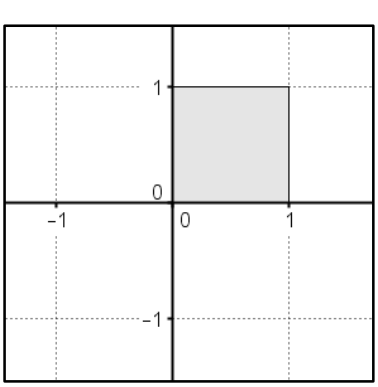
1. وحدة المساحة :

وحدة المساحة في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي مساحة الرباعي المحدّد بالنقطة O والشعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$







2. حساب مساحة حيّز :

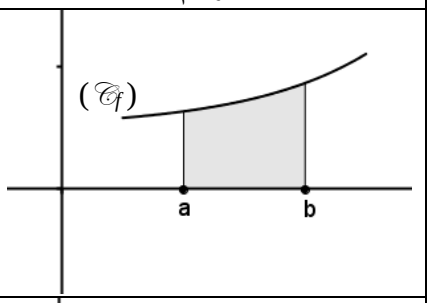
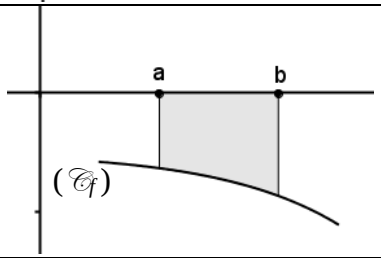
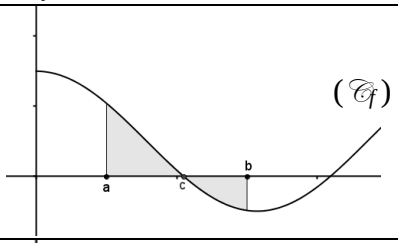
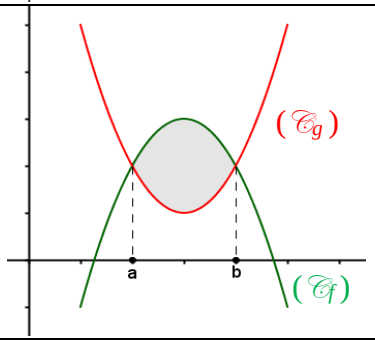
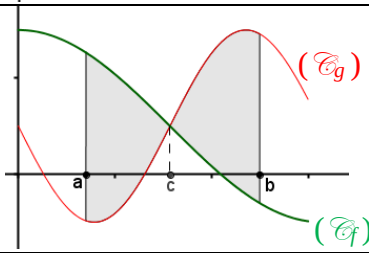
- لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. مساحة الحيّز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

- لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$. مساحة الحيّز المحصور بين المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

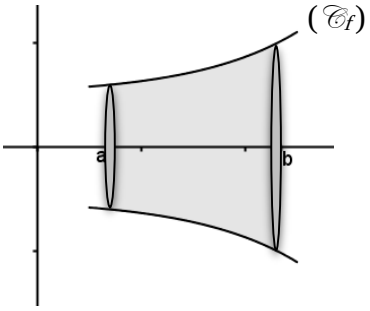
3. حالات خاصة :

الرسم	ملاحظات	مساحة الحيّز الرمادي في الرسم
	f موجبة على المجال $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a;b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	f موجبة على المجال $[a;c]$ وسالبة على المجال $[c;b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$
	$(\mathscr{C}_f)$ فوق $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[a;b]$	$\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right)u.A$
	$(\mathscr{C}_f)$ فوق $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[a;c]$ و$(\mathscr{C}_g)$ تحت $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $[c;b]$	$\left(\begin{array}{l}\int_a^c [f(x)-g(x)]dx \\ +\int_c^b [g(x)-f(x)]dx\end{array}\right)u.A$

4. حساب الحجوم :

حجم المجسّم المولّد بدوران المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ حول محور الفواصل دورة كاملة في مجال $[a;b]$ هو :

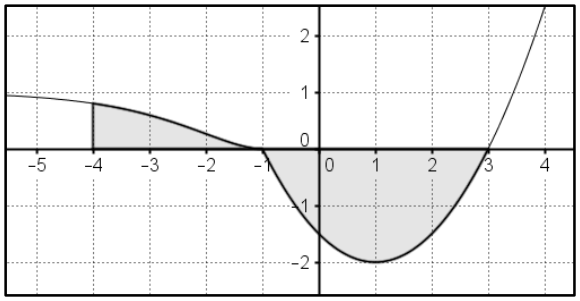
$$V = \left[\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx\right] u.v$$



مثال على حساب المساحات :

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{2} \; ; x \geq -1 \\ xe^{x+1}+1 \; ; x \leq -1 \end{cases}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني المبيّن أسفله.

احسب مساحة الحيّز المظلل في الشكل.



$$A = \underbrace{\int_{-4}^{-1}(xe^{x+1}+1)dx}_{I} - \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)dx}_{J}$$

$$I = \int_{-4}^{-1}(xe^{x+1}+1)dx = \int_{-4}^{-1} xe^{x+1}dx + \int_{-4}^{-1} dx \; ; \; u = x \Rightarrow u' = 1 \; ; \; v' = e^{x+1} \Rightarrow v = e^{x+1}$$

$$I = [xe^{x+1}]_{-4}^{-1} - \int_{-4}^{-1} e^{x+1}dx + [x]_{-4}^{-1} = [xe^{x+1}]_{-4}^{-1} - [e^{x+1}]_{-4}^{-1} + [x]_{-4}^{-1} = [(x-1)e^{x+1}+x]_{-4}^{-1}$$

$$= 5e^{-3} + 1$$

$$J = \int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3} = -\frac{16}{3}$$

$$A = I - J = 5e^{-3} + 1 + \frac{16}{3} = \boxed{5e^{-3} + \frac{19}{3}\; u.a}$$