قواعد أساسية في الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية

الشكل الجبري لعدد مركّب : $\boxed{z = x + iy}$

$Re(z) = x$(الجزء الحقيقي) ; $Im(z) = y$(الجزء التخيّلي) ; $i^2 = -1$

$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $z' = x' + iy'$; $z = z' \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

مرافق عدد مركّب : $\boxed{\bar{z} = x - iy}$

$z + \bar{z} = 2x$; $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

$\bar{z} = z \Rightarrow z$ حقيقي ; $\bar{z} = -z \Rightarrow z$ تخيّلي صرف

طويلة عدد مركّب : $\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$|\bar{z}| = |z|$; $|z|^2 = z.\bar{z}$; $|z.z'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

عمدة عدد مركّب : $\boxed{arg(z) = \theta + 2k\pi}$

$cos\ \theta = \frac{x}{r}$; $sin\ \theta = \frac{y}{r}$

$arg(\bar{z}) = -arg(z)$; $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$; $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$

$arg(z^n) = n.arg(z)$

$arg(z) = k\pi \Rightarrow z$ حقيقي ; $arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow z$ تخيّلي صرف

الشكل المثلّثي لعدد مركّب : $\boxed{z = r(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)}$

$z = x + iy = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$; $(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)^n = cos\ (n\theta) + i\ sin\ (n\theta)$

الشكل الأسّي لعدد مركّب : $\boxed{z = re^{i\theta}}$

$\bar{z} = re^{-i\theta}$; $z.z' = r.r'e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n.e^{in\theta}$

$re^{i\frac{\pi}{2}} = i\,r$; $re^{i\pi} = -r$

التفسير الهندسي للأعداد المركّبة :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|$; $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ (I منتصف $[AB]$)

$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ ($G\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma\}$)

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$; $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي $\Rightarrow A, B, C$ على استقامة واحدة ; $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

مثال 1 :

A, B, C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1$ ، $z_B = 2i$ و $z_C = -1 - i$

عيّن طويلة وعمدة العدد المركّب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2i - 1}{-2 - i} = \frac{(-1 + 2i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = -\frac{5i}{5} = -i$$

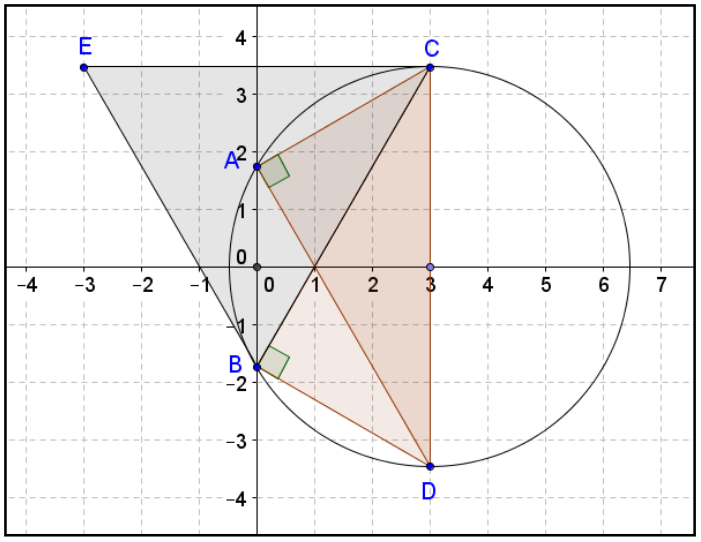
$$\begin{cases} \left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين و قائم في } A}$$

مثال 2 :

E, D, C, B, A نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = \sqrt{3}i \; ; z_B = -\sqrt{3}i \; ; z_C = 3 + 2\sqrt{3}i \; ; z_D = 3 - 2\sqrt{3}i \; ; \; z_E = -3 + 2\sqrt{3}i$$

مثّل النقط A ، B ، C ، D ، E :



اثبت أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 - 3\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{المثلث } ACD \text{ قائم في } A$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{المثلث } BCD \text{ قائم في } B$$

بما أنّ المثلثين ACD و BCD قائمان ولهما نفس الوتر (CD) ، نستنتج أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ω منتصف $[CD]$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}CD$.

$$z_\omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i + 3 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{\omega(3;0)}$$

$$r = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}|z_D - z_c| = \frac{1}{2}|3 - 2\sqrt{3}i - 3 - 2\sqrt{3}i| = \frac{1}{2}|-4\sqrt{3}i| = \frac{1}{2}(4\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}}$$

بيّن أنّ $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث BEC

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{-3 + 3\sqrt{3}i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BC \\ (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } BEC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

مثال 3 :

ليكن L عدد مركب حيث : $L = \frac{\bar{z}+2}{z+2}$ و z عدد مركب حيث $z \neq -2$. و لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1. عيّن الجزء الحقيقي و التخيلي للعدد المركب L

$$L = \frac{\bar{z}+2}{z+2} = \frac{x-iy+2}{x+iy+2} = \frac{(x+2-iy)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)} = \frac{(x+2-iy)^2}{(x+2)^2+y^2} = \frac{(x+2)^2-y^2-2iy(x+2)}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\boxed{L = \frac{(x+2)^2-y^2}{(x+2)^2+y^2} - \frac{2y(x+2)}{(x+2)^2+y^2}i}$$

2. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L حقيقيا

$$L \text{ حقيقي} \Rightarrow \begin{cases} 2y(x+2) = 0 \\ (x+2)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \dots (\Delta) \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2 \dots (\Delta') \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (\Delta) \cup (\Delta') - \{(-2;0)\}}$$

3. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صرفا

$$L \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2-y^2 = 0 \\ (x+2)^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x+2 \dots (D) \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y = -x-2 \dots (D') \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (D) \cup (D') - \{(-2;0)\}}$$

التحويلات النقطية :

$$\boldsymbol{M(z)} \ ; \ \boldsymbol{M'(z')} \ ; \ \boldsymbol{\omega(z_0)} \ ; \ \boldsymbol{\vec{U}(b)}$$

التحويل النقطي	العبارة المركّبة
الانسحاب T الذي شعاعه $\vec{U}$	$\boldsymbol{T(M) = M' \Rightarrow z' = z + b}$
التحاكي h الذي مركزه ω و نسبته k	$\boldsymbol{h(M) = M' \Rightarrow z' - z_0 = k(z - z_0)}$
الدوران R الذي مركزه ω و زاويته θ	$\boldsymbol{R(M) = M' \Rightarrow z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$
التشابه المباشر S الذي مركزه ω ، نسبته k و زاويته θ	$\boldsymbol{S(M) = M' \Rightarrow z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)}$

مثال : نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -3 + i$

1. عيّن النقطة C صورة النقطة B بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$C = T(B) \Rightarrow z_C = z_B + z_{\vec{U}} = -3 + i + 2 + i \Rightarrow \boxed{z_C = -1 + 2i}$$

2. عيّن النقطة D صورة النقطة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2

$$D = h(C) \Rightarrow z_D - z_A = 2(z_C - z_A) \Rightarrow z_D = 2z_C - z_A = 2(-1 + 2i) - 1 + 2i \Rightarrow \boxed{z_D = -3 + 6i}$$

3. عيّن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$E = R(D) \Rightarrow z_E - z_O = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_O) \Rightarrow z_E = iz_D = -i(-3 + 6i) \Rightarrow \boxed{z_E = 6 + 3i}$$

4. عيّن النقطة F صورة النقطة E بالتشابه المباشر S الذي مركزه $\omega(2;1)$ ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$F = S(E) \Rightarrow z_F - z_\omega = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_\omega) \Rightarrow z_F = \frac{1}{2}i(z_E - z_\omega) + z_\omega = \frac{1}{2}i(6 + 3i - 2 - i) + 2 + i$$

$$= \frac{1}{2}i(4 + 2i) + 2 + i = 2i - 1 + 2 + i \Rightarrow \boxed{z_F = 1 + 3i}$$

تعيين طبيعة التحويل النقطي المعرّف بعبارته المركّبة : $z' = az + b$ وذكر عناصره المميّزة

a	طبيعة التحويل	العناصر المميّزة للتحويل
$a = 1$	انسحاب شعاعه $\vec{U}$	$z_{\vec{U}} = b$
$a \in \mathbb{R} - \{1\}$	تحاكي مركزه ω ونسبته k	$z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$; $k = a$
$a \in \mathbb{C}$; $\lvert a\rvert = 1$	دوران مركزه ω وزاويته θ	$z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$; $\theta = \arg(a)$
$a \in \mathbb{C}$; $\lvert a\rvert \neq 1$	تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته k وزاويته θ	$z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$; $k = \lvert a\rvert$; $\theta = \arg(a)$

مثال : عيّن طبيعة التحويلات النقطية المعرّفة بالعبارات المركّبة التالية واذكر عناصرها المميّزة

1. $\boldsymbol{z' = z + 2 - i}$

$a = 1$: التحويل هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ حيث $z_{\vec{U}} = 2 - i$ ، أي $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{z' = 2z + 1 + 3i}$

$a = 2$: التحويل هو تحاكي مركزه ω ونسبته 2 حيث : $z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+3i}{1-2} = -1 - 3i$ ، أي $\omega(-1;-3)$

3. $\boldsymbol{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 2i}$

$\lvert a\rvert = \left\lvert\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\rvert = 1$: التحويل هو دوران مركزه ω حيث : $z_\omega = \frac{2i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\sqrt{3} + i$ ، أي $\omega(-\sqrt{3};1)$ وزاويته θ حيث : $\theta = \arg a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ، $\left(\cos\theta = \frac{1}{2}\ ; \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $\boldsymbol{z' = 2iz + 1 - 2i}$

$\lvert a\rvert = \lvert 2i\rvert = 2$: التحويل هو تشابه مباشر مركزه ω حيث : $z_\omega = \frac{1-2i}{1-2i} = 1$ ، أي $\omega(1;0)$ ، نسبته $k = \lvert a\rvert = 2$ وزاويته θ حيث : $\theta = \arg a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $(\cos\theta = 0\ ; \sin\theta = 1)$

العمليات على الشكل الجبري :

مثال 1 :

اكتب الأعداد المركّبة التالية على شكلها الجبري

- $z_1 = (2+i)^2 = 2^2 + i^2 + 4i = 4 - 1 + 4i = \boxed{3 + 4i}$
- $z_2 = (4+2i)(4-2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16 - 4i^2 = 16 - 4(-1) = \boxed{20}$
- $z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2 = [(2-i)(1+2i)]^2 = (2 + 4i - i - 2i^2)^2 = (4+3i)^2$
  $= 16 - 9 + 24i = \boxed{7 + 24i}$
- $z_4 = (3-2i)^3 = 3^3 - 3(3)^2(2i) + 3(3)(2i)^2 - (2i)^3 = 27 - 54i - 36 + 8i = \boxed{-9 - 46i}$
- $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
  $= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = \frac{8}{8} = \boxed{1}$
- $z_6 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i-18i-12}{3^2-(2i)^2} = \frac{-26i}{9+4} = \frac{-26i}{13} = \boxed{-2i}$
- $z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{(1+i)(3+i\sqrt{2})}{(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})} = \frac{3+i\sqrt{2}+3i+i^2\sqrt{2}}{3^2-(i\sqrt{2})^2} = \frac{3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i}{9+2} = \frac{3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i}{11} = \boxed{\frac{3-\sqrt{2}}{11} + \frac{(3+\sqrt{2})}{11}i}$
- $z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{4n} = \left(\frac{1+i+i+i^2}{1-i^2}\right)^{4n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{4n} = (i)^{4n} = 1$
- $z_9 = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}$
  $= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + 2i\cos\theta\sin\theta = \boxed{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$

تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب :

$\boldsymbol{z^2 = 8 - 6i}\ ; z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{8} + \underbrace{2xy}_{-6}\, i ; |z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

$$z^2 = 8 - 6i \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ xy = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

الجذرين التربيعيين للعدد $6i - 8$ هما : $z_1 = 3 - i$ و $z_2 = -3 + i$. $(z_1^2 = z_2^2 = 8 - 6i)$

$\boldsymbol{z^2 = -15 + 8i}\ ; z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{-15} + \underbrace{2xy}_{8}\, i ;\ |z^2| = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = 17$

$$z^2 = -15 + 8i \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

الجذرين التربيعيين للعدد $8i - 15$ هما : $z_1 = 1 + 4i$ و $z_2 = -1 - 4i$. $(z_1^2 = z_2^2 = -15 + 8i\ )$

حل معادلات من الدرجة الأولى :

$\boldsymbol{3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i} \Rightarrow 3z - (1+i)z = -1 - 2i + 2 - i \Rightarrow (3 - 1 - i)z = 1 - 3i$

$$\Rightarrow (2 - i)z = 1 - 3i \ \Rightarrow z = \frac{1 - 3i}{2 - i} = \frac{(1 - 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i - 6i - 3i^2}{2^2 - i^2} = \frac{5 - 5i}{5} = \boxed{1 - i}$$

$\boldsymbol{(3 - 4i)z^2 = iz} \Rightarrow (3 - 4i)z^2 - iz = 0 \Rightarrow z[(3 - 4i)z - i] = 0 \Rightarrow z = 0$ أو $(3 - 4i)z - i = 0$

$$(3 - 4i)z = i \ \Rightarrow z = \frac{i}{3 - 4i} = \frac{i(3 + 4i)}{25} = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i\ ; \boxed{S = \left\{0\ ;\ -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i\right\}}$$

$$\frac{\boldsymbol{z + 1}}{\boldsymbol{z - 1}} = \boldsymbol{2i} \ \Rightarrow z + 1 = 2i(z - 1) \Rightarrow z - 2iz = -1 - 2i \ \Rightarrow z(1 - 2i) = -1 - 2i \Rightarrow z = \frac{-1 - 2i}{1 - 2i}$$

$$z = \frac{(-1 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-1 - 2i - 2i + 4}{5} = \frac{3 - 4i}{5} = \boxed{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i}$$

حل معادلات من الدرجة الثانية :

$\boldsymbol{z^2 + 2z + 5 = 0}\ ;\ \Delta = -16 = (4i)^2\ ;\ z_1 = \dfrac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i\ ;\ z_2 = \dfrac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$

$\boldsymbol{z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0} \Rightarrow (x + iy)^2 - 4(x - iy) - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy - 4x + 4iy - 5 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 4x - 5 + 2iy(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ 2y(x + 2) = 0 \end{cases}$$

- $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1$ أو $x = 5 \Rightarrow z_1 = -1\ ;\ z_2 = 5$
- $x = -2 \Rightarrow y^2 = 7 \Rightarrow y = \sqrt{7}$ أو $y = -\sqrt{7} \Rightarrow z_3 = -2 + \sqrt{7}i\ ;\ z_4 = -2 - \sqrt{7}i$

$$\boxed{S = \{-1\ ;\ 5\ ;\ -2 + \sqrt{7}i\ ;\ -2 - \sqrt{7}i\}}$$

الانتقال بين الأشكال الثلاثة (الجبري ، المثلّثي ، الأسّي) لعدد مركب :

مثال 1 :

$\boldsymbol{z_1 = 2 + 2i}\ ;\ |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ ;\ \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[cos\ \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\ sin(-\frac{\pi}{6})\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_3 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلثيا}} = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \boxed{4e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_3 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_4 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلثيا}} = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left[cos\ \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\ sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \boxed{3e^{i\frac{4\pi}{3}}};\ z_4 = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_5 = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلثيا}} = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{5}\left(cos\ \frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_5 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i}$$

طريقة ثانية لحساب z_5 :

$$\boldsymbol{z_5 = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{5}\left(cos\ \frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i}$$

مثال 2 :

نعتبر العددين المركّبين z_1 و z_2 حيث : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي

$$\begin{cases} |z_1| = \sqrt{3+1} = 2 \\ \cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 2 \\ \arg(z_1) = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$\begin{cases} |z_2| = \sqrt{2+2} = 2 \\ \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = 2 \\ \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركّب L حيث : $\boldsymbol{L = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}}$

$$L = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{cases} |L| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg(L) = \theta_1 - \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |L| = \frac{2}{2} \\ \arg(L) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |L| = 1 \\ \arg(L) = \frac{13\pi}{12} \end{cases}}$$

اكتب العدد المركّب L على الشكل الجبري

$$L = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = \frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)} \Rightarrow \boxed{L = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}$$

استنتج قيمتي $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

$$L = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i = \cos\frac{13\pi}{12} + i\ \sin\frac{13\pi}{12} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}}$$