# سلسلة المتتاليات مع الحلول

للشعب العلمية

بوشناق يوسف

---

الصفحة

رياضيات الاستاذ بوشناق يوسف

2020/2019

باك 2020

# المتتاليات العددية

## التمرين الاول

1.لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln(x)$

- أدرس تغيرات الدالة $f$

2. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\dfrac{e^n}{n^n}$ .

أحسب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ و $u_5$ ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

3. $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=\ln(u_n)$

أ- أثبت أن $v_n=n-n\ln(n)$ .

ب- باستعمال الدالة $f$ ، أدرس إتجاه تغير $(v_n)$ ثم أستنتج أن $(u_n)$ متناقصة .

جـ - استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $0\prec u_n\leq e$

د- استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و عين نهايتها .

## التصحيح

1 - دراسة تغيرات الدالة $f$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=-\infty$

الدالة قابلة للإشتقاق على المجال و لدينا : $f'(x)=1-\left(1\times\ln x+\dfrac{1}{x}\times x\right)=-\ln x$

$f'(x)=0$ معناه $-\ln x=0$ أي $x=1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

2. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\dfrac{e^n}{n^n}$ .

حساب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ و $u_5$ ثم وضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

$u_1=e\simeq 2.71$ ، $u_2=\dfrac{e^2}{4}\simeq 1.85$ ، $u_3=\dfrac{e^3}{27}\simeq 074$ ، $u_4=\dfrac{e^4}{256}\simeq 0.21$ ، $u_5=\dfrac{e^5}{3125}\simeq 0.05$

يظهر أن $(u_n)$ متناقصة و نهايتها تؤول الى 0

3.أ- اثبات أن $v_n = n - n\ln(n)$ .

لدينا : $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln e^n - \ln n^n = n\ln e - n\ln(n) = n - n\ln(n)$

ب- باستعمال الدالة $f$ ،دراسة إتجاه تغير $(v_n)$ ثم استنتاج أن $(u_n)$ متناقصة .

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $v_n = f(n)$ و الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و بالتالي $(v_n)$ متناقصة تماما .

بما أن $u_n = e^{v_n}$ و الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن اتجاه تغير $(u_n)$ هو اتجاه تغير $(v_n)$

أي : $(u_n)$متناقصة تماما .

جـ - استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $0 \prec u_n \leq e$

المتتالية $(u_n)$متناقصة تماما و موجبة و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $0 \prec u_n \leq u_1 = e$ أي أن : $(u_n)$محدودة .

د- استنتاج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و تعيين نهايتها .

المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(n) = -\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$

## التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية $f$ **المعرفة على المجال** $]0;+\infty[$ **بـ :** $f(x) = x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

**نسمي** $(C_f)$المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ **عند** $0$ **وعند** $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما $x$ ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) **أدرس الوضع النسبي للمنحني** $(C_f)$بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$**ذي المعادلة** $y = x$ .

5) **أحسب** $f(4)$ **ثم أرسم** $(\Delta)$**و**$(C_f)$.

**II.** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بـ :** $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 < u_n < 2$.

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ثم استنتج أنها متقاربة .

3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# التصحيح

**I. 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $0$ وعند $+\infty$.**

- **حساب نهايتي الدالة $f$ :**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$

**2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$، $f'(x)=\dfrac{(x-1)\left(x^2+4x+6\right)}{x\left(x^2+2\right)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$**

- **حساب** $f'(x)$ :

$$f'(x)=1+3\times\frac{\dfrac{2x(3x)-3\left(x^2+2\right)}{(3x)^2}}{\dfrac{x^2+2}{3x}}=1+3\times\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{3x}{x^2+2}$$

أي $f'(x)=1+\dfrac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\dfrac{9x}{x^2+2}=1+\dfrac{3x^2-6}{x\left(x^2+2\right)}=\dfrac{x^3+3x^2+2x-6}{x\left(x^2+2\right)}$

وبالتالي : $f'(x)=\dfrac{(x-1)\left(x^2+4x+6\right)}{x\left(x^2+2\right)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**

$f'(x)=0$ يعني $\dfrac{(x-1)\left(x^2+4x+6\right)}{x\left(x^2+2\right)}=0$

ومنه $x-1=0$ أو $x^2+4x+6=0$ ( ليس لها حل لان $\Delta=16-24=-8<0$ ) مع $x\in]0;+\infty[$

ومنه $x=1$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)\left(x^2+4x+6\right)$ لان $x\left(x^2+2\right)>0$

| $x$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+4x+6$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- **الدالة $f$ متناقصة على المجال $[0;1[$ و متزايدة على المجال $]1;+\infty[$.**

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

- جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ .

- دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ :

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)-x=3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

- $f(x)-y=0$ يعني $3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$ أي $\frac{x^2+2}{3x}=1$

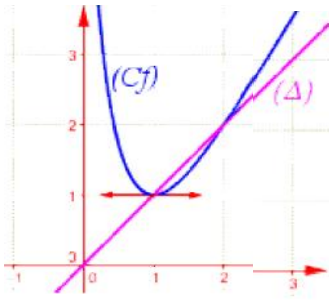
- وبالتالي $x^2+2=3x$

إذن : $x^2-3x+2=0$

- حساب المميز : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ ، $x_1=\frac{3+1}{2}=2$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | ‖ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |




5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

- حساب $f(4)$ :

- $f(4)=4+3\ln\left(\frac{16+2}{3\times4}\right)=4+3\ln\frac{18}{12}=5.22$

- الرسم :

**II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$.**

**1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.**

- **البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$:**

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=\frac{3}{2}$ إذن $1<u_0<2$ ومنه $P(0)$ صحيحة .

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1<u_n<2$.

ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1<u_{n+1}<2$

لدينا : $1<u_n<2$ ومنه $f(1)<f(u_n)<f(2)$ لان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;2[$

- ومنه $1<u_{n+1}<2$ لان $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(1)=1$ و $f(2)=2$

أي $P(n+1)$ صحيحة .

- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

**من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.**

**2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .**

- **دراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أي دراسة تغيرات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- **ندرس إشارة الفرق** $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n+3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)-u_n=3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)$

- بما أن $u_n\in]1;2[$ فإن $3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)<0$

من أجل $x\in]1;2[$ فإن $f(x)-x<0$ **( السؤال (4))**

**وبالتالي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما .**

- **استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة :**

- المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 .

**3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

- **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

# التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- احسب الحدود $u_1$ , $u_2$ , $u_3$ ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية $(u_n)$

2- أ- برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n \leq n + 3$

ب- ادرس اتجاه تغيرات المتتالية $(u_n)$

ج- استنتج أن $(u_n)$ محدودة من الأسفل .هل يمكن القول أن $(u_n)$ متقاربة ؟

3- نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$.

أ- برهن أنّ المتتالية $(v_n)$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأوّل وأساسها.

ب- عبّر عن $v_n$ ثمّ $u_n$ بدلالة $n$ ثم احسب نهاية $(u_n)$ عند $+\infty$

ج- احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

4- لتكن المتتالية $(t_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ- برهن أنّ المتتالية $(t_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل

ب- احسب بدلالة $n$ المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$

و استنتج بدلالة $n$ الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

# التصحيح

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- **حساب الحدود** $u_1$ , $u_2$ , $u_3$ :

$u_1 = \frac{7}{3}$ ، $u_2 = \frac{26}{9}$ ، $u_3 = \frac{97}{27}$

- **تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية** $(u_n)$: متتالية متزايدة

2- **أ- البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن** $u_n \leq n + 3$

لتكن فرضية التراجع $P(n) : u_n \leq n + 3$

* المرحلة 1: الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 2$ أي $P(n) : u_0 \leq 3$

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 0$ أي $u_n \leq n + 3$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \leq n + 1 + 3$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$

لدينا $u_n \le n+3$ و منه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \le \frac{2}{3}n + 3 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3}n + 1$ و بالتالي $u_{n+1} \le n+3$

ولدينا $n+3 \le n+4$ و منه $u_{n+1} \le n+4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.

إذن $u_n \le n+3$.

**ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية $(u_n)$:**

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ و لدينا $u_n \le n+3$ أي

$-\frac{1}{3}u_n \ge -\frac{1}{3}n - 1$ و منه $-\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \ge 0$ و بالتالي $u_{n+1} - u_n \ge 0$ و منه متزايدة

**ج- استنتاج أن $(u_n)$ محدودة من الأسفل .هل يمكن القول أن $(u_n)$متقاربة :**

**لدينا** $(u_n)$ متزايدة معناه $u_n \ge u_0$ أي $u_n \ge 2$ نستنتج أن $(u_n)$ محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن $(u_n)$متقاربة : لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

**3- نعتبر المتتالية $(v_n)$المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$.**

أ- برهن أنّ المتتالية $(v_n)$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأوّل وأساسها:

**$(v_n)$ هي متتالية هندسية معناه** $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا $v_n = u_n - n$ و منه $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1$ و بالتالي $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$ و منه $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ وبالتالي :

$(v_n)$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0 = u_0 - 0 = 2$

**ب- التعبير عن $v_n$ ثمّ $u_n$ بدلالة $n$ ثم حساب نهاية $(u_n)$ عند $+\infty$**

أي $v_n = v_0 \times q^n$ ، $v_n = 2 \times (\frac{2}{3})^n$ و منه $u_n = v_n + n$ : $u_n = 2 \times (\frac{2}{3})^n + n$ : $\lim u_n = +\infty$

**ج-** حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \ldots + (v_n + n) = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + 1 + 2 + \ldots n$$

$$= 2\frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + n(n+1) = 6(1 - (\frac{2}{3})^{n+1}) + n(n+1)$$

**4- لتكن المتتالية $(t_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$**

أ- **البرهان أنّ المتتالية $(t_n)$حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل:** $(t_n)$حسابية معناه $t_{n+1} = t_n + r$

لدينا $t_n = \ln(v_n)$ و منه $t_{n+1} = \ln(v_{n+1})$ أي $t_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}v_n) = \ln(v_n) + \ln(\frac{2}{3})$

لأنّ $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ و منه $t_{n+1} = t_n + \ln(\frac{2}{3})$ و منه $(t_n)$حسابية أساسها $r = \ln(\frac{2}{3})$ و وحدها الأوّل $t_0 = \ln(v_0) = \ln(2)$

ب- حساب بدلالة $n$ المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ :

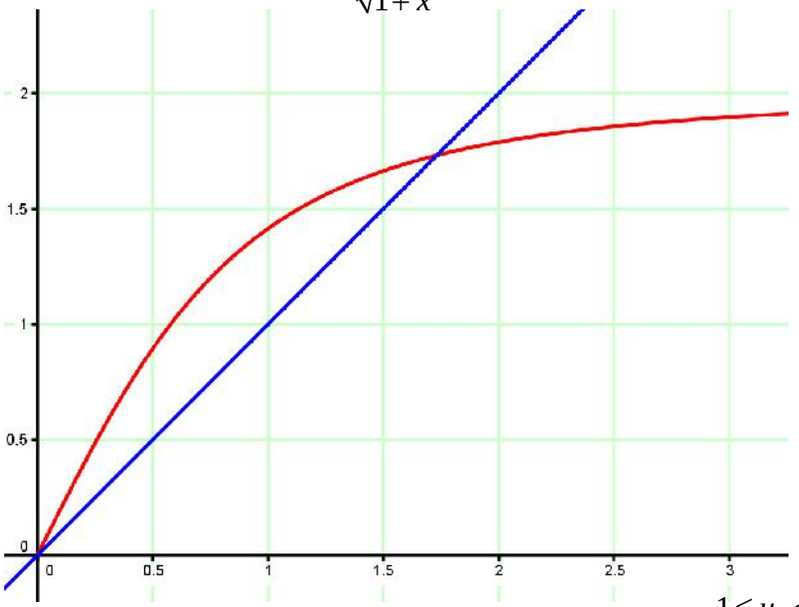
$$A_n = \frac{n+1}{2}(\ln(2) + \ln(2) + n\ln(\frac{2}{3})) = \frac{n+1}{2}(2\ln(2) + n\ln(\frac{2}{3}))$$

- استنتاج بدلالة $n$ الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

لأن : $P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times e^{t_2} \times \ldots \times e^{t_n} = e^{t_0 + t_1 + \ldots t_n}$ و منه $P_n = e^{S_n}$ و $v_n = e^{t_n}$

## التمرين الرابع

المنحنى $(C)$ في الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة $f$ معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$




في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بـــقراءة بيانية شكل جدول تغيرات $f$

2) بين أنه إذا كان $x \in [1,\sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1,\sqrt{3}]$

3) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$

ومن اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) باستعمال المنحنى $(C)$ والمستقيم ذو المعادلة $y = x$

مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها .

جـ ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

د) بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- اكتب عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

## الحل

1) بـــقراءة بيانية نشكل جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $2$ |

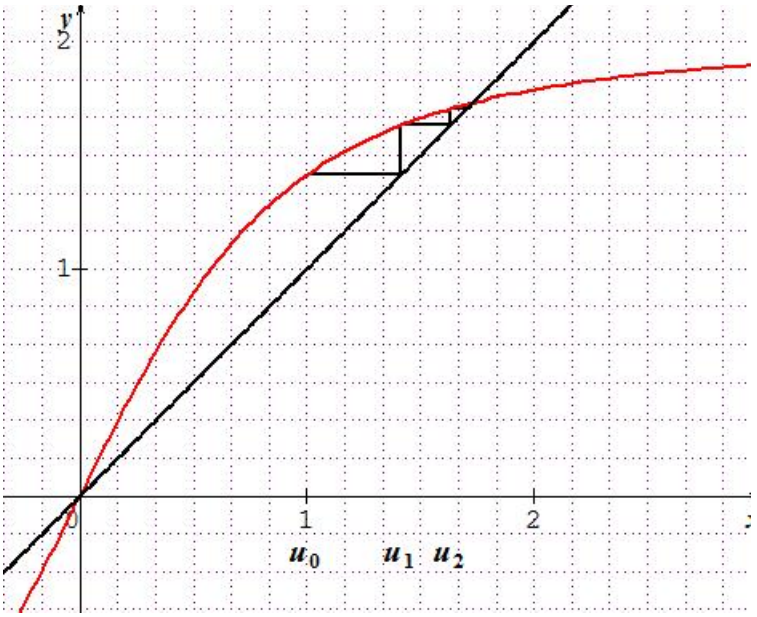
2) بيان أنه إذا كان $x \in \left[1,\sqrt{3}\right]$ فإن $f(x) \in \left[1,\sqrt{3}\right]$

لدينا : $1 \le x \le \sqrt{3}$ ; و بما أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f(1) \le f(x) \le f\left(\sqrt{3}\right)$ أي :

$$f(x) \in \left[1,\sqrt{3}\right] \text{ إذن : } 1 \le \frac{2}{\sqrt{2}} \le f(x) \le \sqrt{3}$$

3) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) باستعمال المنحنى $(C)$ والمستقيم ذو المعادلة $y = x$ ،تمثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ على محور الفواصل




ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ وتقاربها .

يظهر أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة و متقاربة

ج )البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

**من أجل** $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 1$ **إذن** : $1 \le u_0 \le \sqrt{3}$

**نفرض أن** : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ صحيحة و نبرهن أن : $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لدينا : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ **و بما ان الدالة** $f$ متزايدة تما ما فإن : $f(1) \le f(u_n) \le f(\sqrt{3})$ **أي** : $1 \le \frac{2}{\sqrt{2}} \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

ومنه : $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

د) بيان انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$ **ثم استنتاج** اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n = u_n\left(\frac{2}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1\right) = u_n\left(\frac{2-\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{1+u_n^2}}\right) = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

**نعلم أن** : $u_n \le \sqrt{3}$ ومنه $\sqrt{1+u_n^2} \le 2$ **أي** : $2-\sqrt{1+u_n^2} \ge 0$ و بالتالي المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

**أ-** بيان أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} = \frac{4u_n^2}{3\left(1+u_n^2\right)-4u_n^2} = 4 \times \frac{u_n^2}{3-u_n^2} = 4 \times v_n$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1^2}{3-1^2} = \frac{1}{2}$

**ب- كتابة عبارة** $v_n$ **ثم استنتاج عبارة** $u_n$ **بدلالة** $n$

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times 4^n = 2^{2n-1}$

**معناه** : $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ **أي** : $v_n \times \left(3-u_n^2\right) = u_n^2$ ومنه : $3v_n - v_n \times u_n^2 = u_n^2$ **أي** : $u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n}$

$$u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}} = \sqrt{\frac{3 \times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}}$$

**جـ- حساب** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{3 \times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{3 \times \cancel{2^{2n-1}}}{\cancel{2^{2n-1}} \times \left(\frac{1}{2^{2n-1}}+1\right)}} = \sqrt{3}$

ومنه نستنتج ان المتتالية $(u_n)$**مقاربة و تقارب نحو العدد** $\sqrt{3}$ .

## التمرين الخامس

$(U_n)$ متتالية معرفة بـ : $U_0=-6$ ، و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+2n-1$

1- أ) برهن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$ أن : $U_n>0$

ب) أكتب $U_n$ بدلالة $U_{n-1}$ ، ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ أن : $U_n>2n-3$

جـ) احسب نهاية المتتالية $(U_n)$.

2- $(V_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $V_n=U_n-4n+10$

أ) بين أن المتتالية $(V_n)$ هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

ب) أثبت من أجل كل عدد طبيعي $n$ أن : $U_n=2^{2-n}+4n-10$

جـ) احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_n$

---

## الحل

1- أ) $U_1=-4$ و $U_2=-1$ و $U_3=\frac{5}{2}$

البرهان بالتراجع : $U_3=\frac{5}{2}>0$ ، و منه : $P(3)$ محققة.

نفرض من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$ أن : $U_n>0$ صحيحة. نضرب في $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}U_n>0$ .....(1)

و من جهة أخرى: $n\geq 3$ نضرب في 2 و نطرح 1 نجد: $2n-1\geq 5$ .....(2)

بجمع (1) و (2) نجد : $\frac{1}{2}U_n+2n-1>5$ ، و منه: $U_{n+1}>5$ إذن : $U_{n+1}>0$.

ب) لدينا : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+2n-1$ ومنه : $U_{(n-1)+1}=\frac{1}{2}U_{n-1}+2(n-1)-1$

إذن : $U_n=\frac{1}{2}U_{n-1}+2n-3$

من السؤال 1 لدينا : $U_n>0$ و منه : $U_{n-1}>0$ ، نضرب في $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}U_{n-1}>0$.....(1)

و بما أن: $n\geq 4$ ، نضرب في 2 و نطرح 3 نجد : $2n-3>5$ و منه: $2n-3>0$.....(2)

بجمع (1) و (2) نجد : $\frac{1}{2}U_{n-1}+2n-3>2n-3$ و بالتالي : $U_n>2n-3$.

جـ) لدينا : $U_n>2n-3$ بالمرور إلى النهاية نجد: $\lim U_n>\lim\limits_{n\to+\infty}2n-3$ و منه: $\lim U_n=+\infty$

2- أ) $V_{n+1}=U_{n+1}-4(n+1)+10$ و منه : $V_n=U_n-4n+10$

$\frac{1}{2}$ $\frac{\frac{1}{2}U_n-2n+5}{U_n-4n+10}$ $\frac{U_{n+1}-4(n+1)+10}{U_n-4n+10}$ $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ و منه الاساس : $q=\frac{1}{2}$ ،

و حدها الأول : $V_0=U_0-4\times 0+10=4$

ب) لدينا : $V_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^2\times\frac{1}{2^n}=2^{2-n}$

و $V_n=U_n-4n+10$ إذن : $U_n=V_n+4n-10$ بالتعويض : $U_n=2^{2-n}+4n-10$

جـ) $S_n$ هي مجموع المتتالية الهندسية $(V_n)$ و المتتالية الحسابية حدها العام : $4n-10$

$$S_n=4\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}+\frac{n+1}{2}(-10+4n-10)=-8\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{n+1}{2}(-20+4n)$$

# المتتاليات العددية

## التمرين السادس

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=(u_n-1)^2+1$.

1. عين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(u_n)$ متتالية ثابتة.

نفرض فيما يلي أن $\alpha=\frac{3}{2}$.

2. أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.

ب ـ بين أن $(u_n)$ متتالية متناقصة؛ استنتج أنها متقاربة ثم عين نهايتها.

3. $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$، بـ: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ ـ برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب ـ اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ ؛ تأكد من النهاية المحصل عليها في 2. ب.

جـ ـ نضع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$؛ $S_n=\frac{v_0}{2^0}+\frac{v_1}{2^1}+\frac{v_2}{2^2}+...+\frac{v_n}{2^n}$ بين أن $S_n=(-n-1)\ln 2$.

د ـ نضع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$؛ $S'_n={v_0}^2+{v_1}^2+{v_2}^2+...+{v_n}^2$ احسب $S'_n$ بدلالة $n$.

## الحل

**1. تعيين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(u_n)$ متتالية ثابتة.**

$(u_n)$ متتالية ثابتة معناه $u_0=u_n=u_{n+1}$ معناه $u_0=(u_0-1)^2+1$ يكافئ $u_0-1-(u_0-1)^2=0$ يكافئ

$(u_0-1)(1-(u_0-1))=0$ يكافئ $(u_0-1)(-u_0+2)=0$ أي $(\alpha-1)(-\alpha+2)=0$ ومنه $\alpha=1$ أو $\alpha=2$.

**2. أ ـ برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.**

لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ ومنه $1<u_0<2$

نفرض أن $1<u_n<2$ من أجل عدد طبيعي $n$ ونبرهن أن $1<u_{n+1}<2$.

$1<u_n<2$ معناه $0<u_n-1<1$ ومعناه $0<(u_n-1)^2<1$ ومنه $1<(u_n-1)^2+1<2$ أي $1<u_{n+1}<2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.

**ب ـ تبيان أن $(u_n)$ متتالية متناقصة.**

ليكن $n$ عددا طبيعيا

$u_{n+1}-u_n=(u_n-1)^2+1-u_n=(u_n-1)^2-(u_n-1)$.

$u_{n+1}-u_n=(u_n-1)(u_n-1-1)=(u_n-1)(u_n-2)$

بما أن $u_n>1$ فإنّ $u_n-1>0$ وبما أن $u_n<2$ فإن $u_n-2<0$ إذن $(u_n-1)(u_n-2)<0$ أي $u_{n+1}-u_n$ وبالتالي المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**استنتاج أنها متقاربة**

المتتالية $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة ونهايتها عدد حقيقي $\ell$.

**تعيين نهايتها.**

بما أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ولدينا $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$ والدالة $x \mapsto (x-1)^2 + 1$ مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن $\ell = (\ell - 1)^2 + 1$ ومنه $\ell = 1$ أو $\ell = 2$ ولدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ والمتتالية $(u_n)$ متناقصة إذن $\ell = 1$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ .

**أ ـ برهان أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.**

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left((u_n - 1)^2 + 1 - 1\right)$$

$$v_{n+1} = \ln(u_n - 1)^2 = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$$

إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$ .

**ب ـ كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ ؛**

$$v_n = (-\ln 2)2^n$$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ معناه $u_n = e^{v_n} + 1$ ومنه $u_n = e^{(-\ln 2)2^n} + 1$ .

**التأكد من النهاية المحصل عليها في 2. ب.**

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\ln 2)2^n = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(-\ln 2)2^n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{(-\ln 2)2^n} + 1 = 1$ .

**جـ ـ نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \frac{v_2}{2^2} + \ldots + \frac{v_n}{2^n}$**

**تبيان أن $S_n = (-n-1)\ln 2$ .**

$$S_n = \frac{(-\ln 2)2^0}{2^0} + \frac{(-\ln 2)2^1}{2^1} + \ldots + \frac{(-\ln 2)2^n}{2^n}$$

$$S_n = (-\ln 2) + (-\ln 2) + \ldots + (-\ln 2)$$

$$S_n = (n+1)(-\ln 2) = (-n-1)\ln 2$$

د ـ نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $S'_n = {v_0}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2 + \ldots + {v_n}^2$

**احسب $S'_n$ بدلالة $n$ .**

$$S'_n = \left((-\ln 2)2^0\right)^2 + \left((-\ln 2)2^1\right)^2 + \left((-\ln 2)2^2\right)^2 + \ldots + \left((-\ln 2)2^n\right)^2$$

$$S'_n = (\ln 2)^2\left(2^0\right)^2 + (\ln 2)^2\left(2^1\right)^2 + (\ln 2)^2\left(2^2\right)^2 + \ldots + (\ln 2)^2\left(2^n\right)^2$$

$$S'_n = (\ln 2)^2\left[\left(2^0\right)^2 + \left(2^1\right)^2 + \left(2^2\right)^2 + \ldots + \left(2^n\right)^2\right]$$

$$S'_n = (\ln 2)^2\left[\left(2^2\right)^0 + \left(2^2\right)^1 + \left(2^2\right)^2 + \ldots + \left(2^2\right)^n\right]$$

$$S'_n = (\ln 2)^2\left[4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^n\right]$$

$$S'_n = (\ln 2)^2\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right) = (\ln 2)^2\left(\frac{4^{n+1} - 1}{3}\right)$$

جمعها لكم الاستاذ بوشناق يوسف

الشكر الخاص لكل الاساتذة الذين ساهموا في هذا العمل

جعلها الله في ميزان حسناتهم

الى سلسلة اخرى ان شاء الله

بالتوفيق

つづく