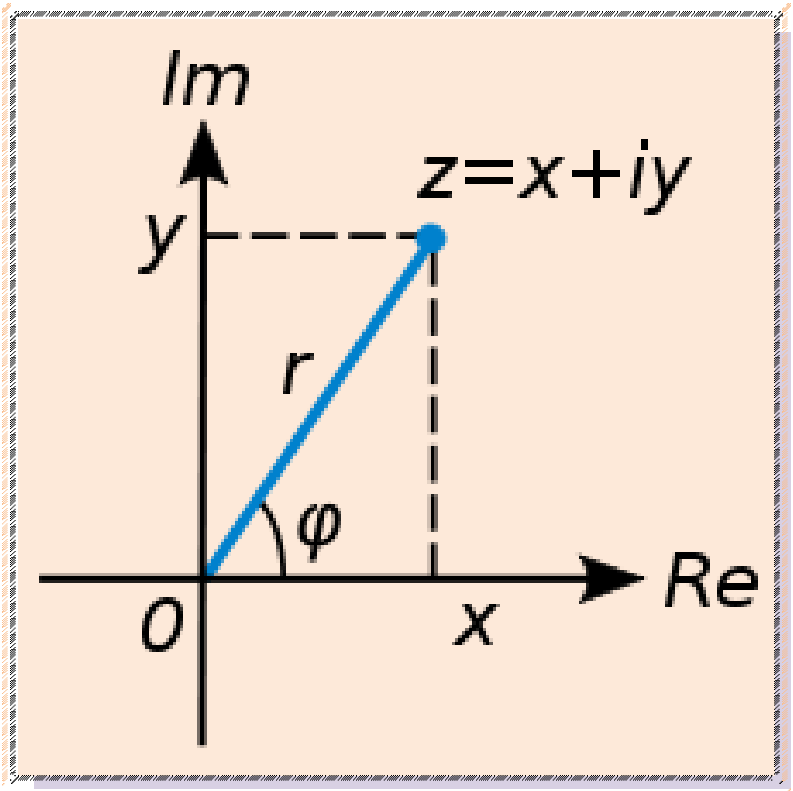
مجلة الرائد في الرياضيات

****

حلول تمارين الأعداد المركبة في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2018-2019

إعداد الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

2018-2017

مجلة الرائد في الرياضيات

****

الحـــــــلول

الجزء الاول

شعبة:العلوم التجريبية

****

الجزء الثاني

شعبة:تقني رياضي

****

الجزء الثالث

شعبة:رياضيات

****

BAC2018-2019

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري





2018-2017

الجزء الأول: تمارين البكالوريات

القسم1: التمارين غير المتعلقة بالتحويلات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين01: دورة 2012 م1

1) حل المعادلة في المجموعة $\mathbb{C}$.

لدينا: $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ومنه $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$ ومنه: $z^2-2z+3iz=3iz-6$ أي: $z^2-2z+6=0$

لحل المعادلة $z^2-2z+6=0$ نستعمل المميز $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-2)^2-4(1)(6)=-20=(2\sqrt{5}i)^2$. المعادلة تقبل حلين مترافقين هما: $z'=1-\sqrt{5}i$ و $z'=1+\sqrt{5}i$

2) التحقق أن A، B تنتميان إلى دائرة واحدة مركزها O وتعيين نصف قطرها.

$|z_A|=|z_B|=\sqrt{6}$ أي $OA=OB=\sqrt{6}$ ومنه A، B تنتميان إلى دائرة واحدة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$

3) التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM

لدينا $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z'=\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}$ ومنه $|z'|=\left|\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}\right|$

لكن $|z'|=OM'$ و $\left|\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}\right|=\dfrac{3CM}{DM}$ ومنه : $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$.

ب-استنتاج أن النقطة M' تنتمي لدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

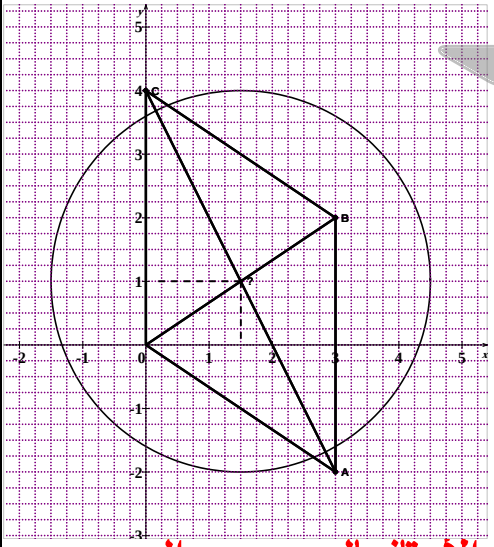
لدينا $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$ ومنه $OM'=3$ لأن $CM=DM$

من العلاقة $OM'=3$ نستنتج أن M' تنتمي للدائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3.

التحقق ان النقطة E تنتمي إلى (γ)

E تنتمي إلى (γ) معناه $OE=3$ لدينا: $OE=|z_E|=|3i|=3$.

التمرين02: دورة 2011 م2



1.أ) تعليم النقط A ، B و C

ب) تعيين طبيعة الرباعي OABC مع التعليل

الرباعي OABC متوازي أضلاع لأن :

$\overrightarrow{OC}(4i)=\overrightarrow{AB}(4i)$ أي $\overrightarrow{OC}(z_C-z_O)=\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$

ج) تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC

النقطة Ω هي نقطة منتصف القطرين [AC] و [OB]

لاحقة Ω هي: $z_\Omega = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{0+3+2i}{2} = \frac{3}{2} + i$

2)تعيين وإنشاء مجموعة النقط (E)

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12...(*)$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ لأن Ω مركز الرباعي OABC

(*) تكافئ $\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 3$ وعليه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها 3

3-أ) حل المعادلة $z^2 - 6z + 13 = 0$ **في** $\mathbb{C}$

لحل هده المعادلة نستعمل المميز المختصر: $\Delta' = b'^2 - ac$

لدينا: $\Delta' = (-3)^2 - (1)(13) = -4$ أي $\Delta' = (2i)^2$ ومنه حلّي المعادلة هما: $z_0 = 3 - 2i$ ، $z_1 = 3 + 2i$

ب)تعيين مجموعة مجموعة النقط M من المستوي

لدينا: $|z - z_o| = |z - z_1|$ تكافئ $MA = MB$ حيث M صورة z ، A صورة z_0 و B صورة z_1

مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة [AB] لأن العددان z_0 و z_1 مترافقان.

التمرين03: دورة 2009 م1

1) حل المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ **في المجموعة** $\mathbb{C}$

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر: $\Delta' = b'^2 - ac$

لدينا: $\Delta' = (-)^2 - (1)(4) = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ ومنه حلّي المعادلة (e) هما: $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{1}$ ، $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1}$

2- أ) كتابة العددين z_1 **و** z_2 **على الشكل الأسي**

لدينا: $z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) حساب الأطوال AB ، AC ، BC

$AB = |z_A - z_B| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$ ، $AC = |z_A - z_C| = |\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i| = 3$ و $BC = |z_C - z_B| = |\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i| = \sqrt{3}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $AB^2 = 12. = BC^2 + AC^2 = 9 + 3 = 12$ ومنه المثلث ABC قائم في C لأن: $AB^2 = BC^2 + AC^2$

ج) ايجاد طويلة وعمدة للعدد المركب Z

لدينا: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ومنه: $|Z| = \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(z_C - z_B) - \arg(z_A - z_B) + 2k\pi$ ومنه $\arg(Z) = \arg(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) - \arg(-2\sqrt{3}i) + 2k\pi$

ومنه $\arg(Z) = (-\frac{\pi}{6}) - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

د) حساب Z^3 **و** Z^6 **واستنتاج أن** Z^{3K} **عدد حقيقي**

لدينا: $|Z|=\frac{1}{2}$ و $\arg(Z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي: $Z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه: $Z^3=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$ و $Z^6=\frac{1}{64}e^{i2\pi}=\frac{1}{64}$ لدينا: $Z^{3k}=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3k}=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3k\pi}{3}}=\frac{1}{8^k}e^{ik\pi}$

نميز حالتين هما: 1) إذا كان k عدد طبيعي زوجي فإن: $Z^{3k}=\frac{1}{8^k}e^{ik\pi}=\frac{1}{8^k}$

2) إذا كان k عدد طبيعي فردي فإن: $Z^{3k}=\frac{1}{8^k}e^{ik\pi}=-\frac{1}{8^k}$

وفي الحالتين العدد Z^{3k} هو عدد حقيقي

التمرين04: دورة 2009 م2

1) حل المعادلة $p(z)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $p(z)=0$ معناه $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$ معناه: $(z-1-i)0$ ⊢ $4\neq 2^2=$;

ومنه: $(z-1-i)=0$ أي $z=1+i$: أو $(z^2-2z+4)=0....(e)$

لحل المعادلة (e) نستعمل المميز المختصر: $\Delta'=b'^2-ac$

ومنه حلّي المعادلة (e) هما: $\Delta'=(\sqrt{3}i)^2$ أي $\Delta'=(-)^2-(1)(4)=-3$

$z'=\frac{1-\sqrt{3}i}{1}$ ، $z''=\frac{1+\sqrt{3}i}{1}$

ومنه حلول المعادلة $p(z)=0$ هي: $z=1+i$ ، $z=1+\sqrt{3}i$ ، $z=1-\sqrt{3}i$.

2- أ) كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي

لدينا: $z_1=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2=1-\sqrt{3}i=2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري والأسي

الشكل الجبري: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

وبعد الحسابات نجد: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{4}=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$

الشكل الأسي: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$

ج)استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

من الجواب السابق لدينا:1)... $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ و (2)... $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$

1).....$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ و (2).....$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و(2) نجد: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$

ومنه: $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3-حساب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

حسب دستور موافر لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{7(456)\pi}{12}+i\sin\frac{7(456)\pi}{12}\right)$

لأن: $\frac{7(456)\pi}{12}=266\pi=(133)2\pi+0$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos 0+i\sin 0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}$

التمرين05: دورة 2008 م1

1-حل المعادلة التالية في C $z^2-2z+2=0$

لدينا: $\Delta'=(-1)^2-(2)=-1=i^2$ ومنه حلّي المعادلة هما: $z_2=1+i$ ، $z_1=1-i$

تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{(1-i)^2}{2}\right)^{2008}$ ومنه $\left(\frac{-2i}{2}\right)^{2008}=(-i)^{2008}=1$

2-أ)البرهان أن $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ ، $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

لدينا: $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)-i\sin(-\theta)}=\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\frac{1}{e^{\theta i}}$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=\frac{\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)}=(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)(\cos(\theta_2)-i\sin(\theta_2)=(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)=e^{(\theta_1-\theta_2)i}$$

ب) كتابة العدد المركب Z على الشكل الأسي

لدينا: $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $AB=BC$ ومنه: المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين

شعبة :تقني رياضي

التمرين06: دورة 2013 م1

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z^2+6z+17=0$.

لدينا: $\Delta'=(3)^2-(2)(17)=-25=25i^2$ ومنه حلّي المعادلة هما: $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ ، $z_2=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

2-حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ **، ثم استنتج طبيعة المثلث** ABC .

*لدينا: $z_A=-4$ ، $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$ ومنه: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{(1+i)}{(1-i)}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

ومنه: $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=|i|=1$ و $\arg(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A})=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

* من الجواب السابق لدينا:

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ ومعناه $AB=AC$ و $\arg(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A})=\frac{\pi}{2}$ ومعناه $\frac{\pi}{2}$ قيسا للزاوية الموجه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

3-أ)تعيين z_D **و** z_E **لاحقتي النقطتين D وعلى الترتيب .**

الرباعي BCDE مربعا مركزه A معناه $z_D+z_B=2z_A$ أي $z_D=-z_B+2z_A=-\frac{13}{2}-\frac{5}{2}i$

الرباعي BCDE مربعا مركزه A معناه $z_E+z_C=2z_A$ أي $z_E=-z_C+2z_A=-\frac{13}{2}+\frac{5}{2}i$

ب)تعيّين (Γ_1) **مجموعة النقط** M **من المستوي حيث:** $\left\|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=10\sqrt{2}$

$\left\|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=10\sqrt{2}$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MA}\right\|=10\sqrt{2}$ لأن الرباعي BCDE مربعا مركزه A

وتكافئ الرباعي $AM=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ومنه (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4- التحقق أن النقطة B **تنتمي إلى** (Γ_2) **ثم تعيّن المجموعة** (Γ_2).

*النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) معناه $\arg(z_B+4)=\frac{\pi}{4}$.

$\arg(z_B+4)=\frac{5}{2}\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ لأن $\arg(z_B+4)=\frac{\pi}{4}$.

* $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$ معناه $\arg(z_M-z_A)=\frac{\pi}{4}$ أي $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}$

ومنه مجموعة النقط (Γ_2) من المستوي هي نصف المستقيم $[AM)$ الذي يشمل النقطة B.

التمرين07: دورة 2010 م1

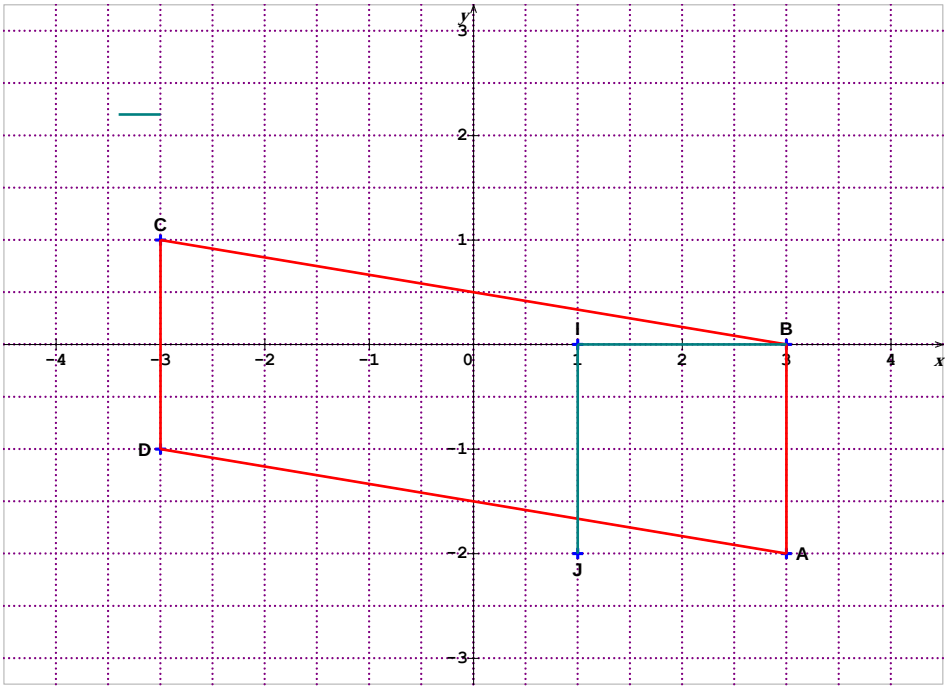
1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

$(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$ تكافئ $(z^2+6z+10)=0$ أو $(z-3+2i)=0$

وتكافئ $(z+3)^2=i^2$ أو $z=3-2i$

وتكافئ $z=-3+i$ أو $z=-3-i$ أو $z=3-2i$

2) تعلّيم النقط : A، C، D و I.



3- أ) تبيان أن الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ **ثم تعيين قيمة** z.

لدينا: $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\arg\left(\frac{z-3+2i}{z-1}\right)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z-3+2i}{z-1}\right|=1\end{cases}$ وتكافئ $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$

$\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ تكافئ $z-3+2i=i(z-1)$ أي $z(1-i)=3(1+i)$ أي $z=\frac{3(1+i)}{1-i}=\frac{3(1+i)^2}{2}=3$

ب)التحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ **و تعيّن طبيعة الرباعي** ABCD.

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2i$ و $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2i$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

طبيعة الرباعي ABCD متوازي أضلاع لأن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

ج)كتابة العدد المركب $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J}$ على الشكل الأسي

$$Z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_J} = \frac{2-2i}{2+2i} = -i = 1.e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

التحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$. ثم تعيّن طبيعة الرباعي ABIJ.

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2i$ و $z_{\overrightarrow{JI}} = z_I - z_J = 2i$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$

لدينا: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$ ولدينا: $\frac{z_A - z_I}{z_B - z_J} = 1.e^{-\frac{\pi}{2}i}$ معناه القطران [AI]و [BJ]متعامدان ومتقايسان

ومنه طبيعة الرباعي ABIJ مربعا.

التمرين08: دورة 2011 م1

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) وكتابة حلولها على الشكل المثلثي.

لدينا: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \ldots\ldots (E)$ تكافئ $z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = -1 \ldots\ldots (E)$ وتكافئ $(z-\sqrt{3})^2 = i^2$

ومنه: $z - \sqrt{3} = i$ أو $z - \sqrt{3} = -i$ وبالتالي الحلين هما: $z = \sqrt{3} + i$ أو $z' = \sqrt{3} - i$

2) أ) كتابة L على الشكل الأسي.

لدينا: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 1.e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

ب)ا ثبات أن $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$.

لدينا: $z_A - z_B = \sqrt{3} + i - 2i = -\sqrt{3} + i \ldots\ldots (1)$ و لدينا: $L(z_C - z_B) = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(-2i) = -\sqrt{3} + i \ldots (2)$

من (1) و (2) نجد: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$.

جـ)ا ستنتاج نوع المثلث ABC واحسب مساحته S.

لدينا: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ تكافئ $|z_A - z_B| = |L||(z_C - z_B)|$ وتكافئ $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ لأن $|L| = 1$

وعليه $AB = BC$ ومنه المثلث ABC متساوي الساقين.

مساحة المثلث ABC هي $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC.|\sin(B)|$

لدينا: $AB = |z_A - z_B| = |-\sqrt{3} + i| = 2$ و $CB = |z_C - z_B| = |-\sqrt{3} + i| = 2$ و $\sin(B) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه: $S_{ABC} = 2\sqrt{3}(u.a)$

التمرين09: دورة 2010 م2

1-أ)كتابة العدد: $a=-2+2\sqrt{3}i$ **على الشكل الاسي .**

$a=4(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=4(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))=4e^{\frac{2\pi}{3}i}$:ومنه $|a|=\left|-2+2\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

ب- حل في $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $z^2=-2+2\sqrt{3}i$.

لدينا: $z^2=-2+2\sqrt{3}i$ ومنه : $z^2=a$ حيث $z=[r;\theta]$

$z^2=a$ تكافئ $[r^2;2\theta]=\left[4;\frac{2\pi}{3}\right]$ وتكافئ الجملة $\begin{cases}r^2=4\\2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ حيث k عدد صحيح.

الجملة تكافئ الجملة $\begin{cases}r^2=4\\2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ تكافئ الجملة $\begin{cases}r=2\\\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{cases}$ حيث $k=0$ أو $k=1$.

من أجل $k=0$ نجد: $z_0=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]=1+\sqrt{3}i$ و من أجل $k=1$ نجد: $z_1=\left[2;\frac{4\pi}{3}\right]=-1-\sqrt{3}i$

2) أ-حساب طويلة العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ **وعمدة له.**

لدينا: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{\left|3+i\sqrt{3}\right|}{\left|1-i\sqrt{3}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

ولدينا: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(3+i\sqrt{3})-\arg(1-i\sqrt{3})+2k\pi=\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{3})+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ب-استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه المثلث ABC قائم في A.

3) أ-التحقق أن النقطة B تنتمي إلى (E).

B تنتمي إلى (E) معناه $\arg(\overline{z_B}+2)=\frac{\pi}{3}$ لدينا: $\arg(\overline{z_B}+2)=\arg(1+i\sqrt{3})=2\arg(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$

ب-تعيين المجموعة (E)

$*\arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$ معناه $\arg(z+2)=-\frac{\pi}{3}$ أي $\arg(z_M-z_A)=-\frac{\pi}{3}$ أي $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{3}$

ومنه مجموعة النقط (E) من المستوي هي نصف المستقيم [AM) الذي يشمل النقطة B .

التمرين10: دورة 2009 م1

1-أ)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

لدينا: $z^2-2z+2=0$ تكافئ $z^2-2z+1=-1$ وتكافئ $(z-1)^2=i^2$

ومنه: $z-1=i$ أو $z-1=-i$ وبالتالي الحلين هما: $z=1+i$ أو $z'=1-i$

ب)استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $(\bar{z}+3)^2-2(\bar{z}+3)+2=0$

نضع: $Z=\bar{z}+3$ ومنه المعادلة $(\bar{z}+3)^2-2(\bar{z}+3)+2=0$ تكافئ $Z^2-2Z+2=0$

ومنه: $Z=1+i$ أو $Z=1-i$ حسب الجواب 1-أ).

وبالتالي: $\bar{z}+3=1-i$ أو $\bar{z}+3=1+i$ أي $z+3=1+i$ أو $z+3=1-i$

ومنه: $z=-2+i$ أو $z=-2-i$

2- أ)تعيّين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي: $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$

لدينا: $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ تكافئ $z-(1-i)=ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ **أي** $z_M-z_A=ke^{i\frac{5\pi}{4}}$

$\arg(z_M-z_A)=\frac{5\pi}{4}$ لأن k يمسح $\mathbb{R}^+$ ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{5\pi}{4}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف المستقيم مبدأه A وشعاع توجيه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{u};\vec{v})=\frac{5\pi}{4}$

ب)تعيّين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي: $|z-1+i|=|z-1-i|$.

لدينا: $|z-1+i|=|z-1-i|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافئ $MA=MB$

ومنه: مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ لأن العددان z_A و z_B مترافقان.

التمرين11: دورة 2009 م2

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-6z+18=0$

لدينا: $z^2-6z+18=0$ تكافئ تكافئ $z^2-6z+9=-9$ وتكافئ $(z-3)^2=(3i)^2$

ومنه: $z-3=3i$ أو $z-3=-3i$ وبالتالي الحلين هما: $z=3+3i$ أو $z'=3-3i$

2-أ) كتابة العدد المركب: $z_1=3-3i$ على الشكل الأسي

ومنه: $|z_1|=|3-3i|=\sqrt{(3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ $z_1=3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=3\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

ب) حساب طويلة العدد z_3 وعمدة له

لدينا: $z_1\times z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

ومنه: $|z_3|=\frac{6}{|z_1|}=\sqrt{2}$ و $\arg z_3=\frac{\pi}{12}-\arg(z_1)+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $z_3=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$

أستنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

لدينا: $z_1\times z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})....(1)$

و لدينا: $z_1\times z_3=(3-3i)(\sqrt{2})(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)(1+\sqrt{3}i)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)\right]...(2)$

من (1) و(2) نستنتج أن: $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$.

3-أ)تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بـ G_α

الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ تقبل مرجحا G_α معناه $(1-1+\alpha\neq 0)$ مجموع المعاملات غير معدوم

أي $\alpha\neq 0$ وعليه $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

ب)تعيين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$

الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ تقبل مرجحا نرمز له بـ G_α معناه $\overrightarrow{G_\alpha A}-\overrightarrow{G_\alpha B}+\alpha\overrightarrow{G_\alpha C}=\vec{0}$

ومنه: $\alpha\overrightarrow{G_\alpha C}=\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{G_\alpha C}=\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB}$ لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$.

العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{G_\alpha C}=\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB}$ تعني أن مجموعة النقط G_α هي المستقيم الذي يشمل C و$\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له باستثناء النقطة C.

التمرين12: دورة 2008 م1

1-تبيان أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*).

$z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*) معناه $z_0{}^3+(2-4i)z_0{}^2-(6+9i)z_0+9(-1+i)=0$

لدينا: $(3i)^3+(2-4i)(3i)^2-(6+9i)(3i)+9(-1+i)=-27i-18+36i-18i+27-9+9i=0$

2-بين أن (*) تقبل حلا حقيقيا z_2.

(*) تقبل حلا حقيقيا z_2 معناه $z_2{}^3+(2-4i)z_2{}^2-(6+9i)z_2+9(-1+i)=0$ حيث $z_2=x$ مع $x\in\mathbb{R}$

ومنه: $(x^3+2x^2-6x-9)+i(-4x^2+9x+9)=0$ أي $x^3+(2-4i)x^2-(6+9i)x+9(-1+i)=0$

وعليه: $(x^3+2x^2-6x-9)=0.....(1)$ و $(-4x^2-9x+9)=0.....(2)$

المعادلة (2) تكافئ $x=-3$ أو $x=\frac{3}{4}$ مرفوض لأن لايحقق المعادلة (1) ومنه: $z_2=-3$

استنتج الحل الثالث z_1

تذكير: اذا كانت z_1 ، z_2 و z_0 حلول المعادلة $az^3+bz^2+cz+d=0$ فإن $z_0+z_2+z_1=-\frac{b}{a}$

وعليه: $z_0+z_2+z_1=-2+4i$ ومنه $z_1=-z_2-z_0-2+4i$ أي $z_1=1+i$

كتابة الحلول على الشكل الأسي

$z_0=3i=3(0+i)=3e^{\frac{\pi}{2}i}$ و $z_1=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $z_2=-3=3(-1+0i)=3e^{\pi i}$

3-تعيين النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$

G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ معناه $z_G=z_A+z_B-z_C=4+4i$

4-تعيين المجموعة (E) للنقط M حيث: $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

لدينا: $AM^2+BM^2-CM^2=-13$ تكافئ $MG^2+AG^2+BG^2-CG^2=-13$

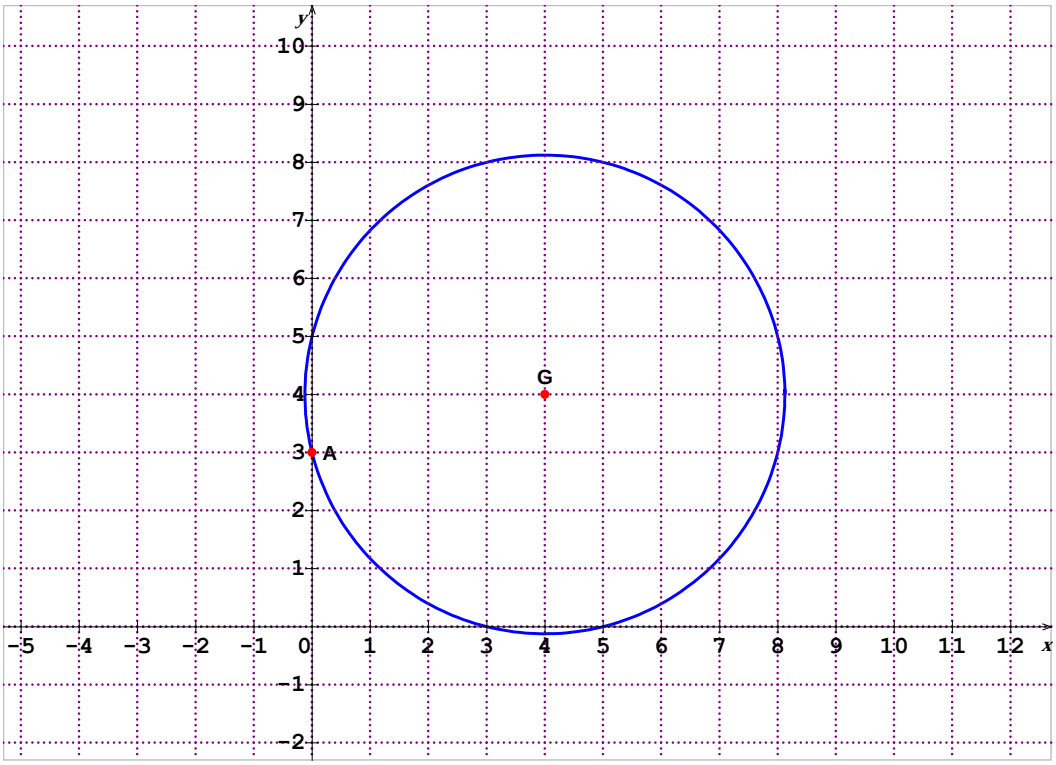
ومنه: $MG^2=-AG^2-BG^2+CG^2-13$

بعد حساب الأطوال GA ، GB و GC نجد: $MG^2=17$ أي $MG=\sqrt{17}$

ومنه: مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{17}$

- تبيان أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E).

A تنتمي إلى المجموعة (E) لأن: $AG=\sqrt{17}$



التمرين13: دورة 2008 م2

1-حل في حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2r\cos(\frac{\theta}{2})z+r^2=0$

نستعمل المميز المختصر $\Delta'=b'^2-ac=\left[r\cos(\frac{\theta}{2})\right]^2-r^2=-r^2(1-\cos^2(\frac{\theta}{2}))=\left(ir.\sin(\frac{\theta}{2})\right)^2$

ومنه :المعادلة تقبل حلين مترافقين هما:

$$z'=r(\cos(\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{\theta}{2})) \quad \text{و} \quad z''=r(\cos(\frac{\theta}{2})-i\sin(\frac{\theta}{2}))$$

كتابة الحلين على الشكل الأسي.

$$z'=r(\cos(\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{\theta}{2}))=re^{\frac{\theta}{2}i} \text{ و } z''=\overline{z'}=re^{-\frac{\theta}{2}i}$$

2- تعيين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الاضلاع

لدينا: $z_A=re^{\frac{\theta}{2}i}$ و $z_B=re^{-\frac{\theta}{2}i}$.

المثلث OAB متقايس الاضلاع معناه $\arg(\frac{z_A}{z_B})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ لأن $|z_A|=|z_B|=r$

$\arg(\frac{z_A}{z_B})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ معناه $\arg(z_A)-\arg(z_B)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه: $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

شعبة :الرياضيات

التمرين14: دورة 2009 م1

1- حل المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$ في $\mathbb{C}$

$(45+45i)f(z)=23+45i-2z$ تكافئ $(45+45i)(z-i)=(23+45i-2z)(z-1)$

وتكافئ $z^2+10z+34=0$

وتكافئ $(z+5)^2=-9$ أي $(z+5)=-3i$ أو $(z+5)=+3i$

وعليه حلول المعادلة هي: $z=-5-3i$ أو $z=-5+3i$

2-أ)تعين مجموعة النقط M بحيث يكون f(z) حقيقيا سالبا تماما

$f(z)$ حقيقيا سالبا معناه $\arg(f(z))=(2k+1)\pi$ حيث k عدد صحيح

$\arg(f(z))=(2k+1)\pi$ هندسيا معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=(2k+1)\pi$ حيث $A(i)$ و $B(1)$

ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي القطعة المستقيمة $[AB]$ بإستثناء النقطتين $A(i)$ و $B(1)$.

ب) حساب العدد المركب z_0

لدينا: $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$ ومعناه $f(z_0)=-i$

ومنه : $\frac{z_0-i}{z_0-1}=-i$ أي $\frac{z_0-i}{z_0-1}=-i(z_0-1)$ $z_0-i=-i(z_0-1)$ بعد الحساب نجد: $z_0=1+i$

3-أ)تعيين نوع المثلث ABC

$\overrightarrow{AC}(0;1).\overrightarrow{BC}(1;0)=0.1+1.0=0$ و $\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=1$

ومنه المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

ب)تعيين النقطة D واستنتاج نوع الرباعي ACBD

*لدينا: النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) معناه $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ تكافئ $z_D-z_A=z_B-z_C$ أي $z_D=z_A+z_B-z_C=0$

*لدينا: القطران $[AB]$ و $[DC]$ لهما نفس المنتصف ولأن: $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}=0$ و $DC=BA$

أي $[AB]$ و $[DC]$ متقايسان ومتناصفان ومتعامدان ومنه الرباعي ACBD مربعا.

التمرين15: دورة 2008 م2

1-تبيّان انه إذا كان α جذرا لـ $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذرا له أيضا

نبين انه $P(\frac{1}{\alpha})=0$ بالإعتماد على أن $P(\alpha)=0$

لدينا: $P(\frac{1}{\alpha})=2(\frac{1}{\alpha})^4-2i(\frac{1}{\alpha})^3-(\frac{1}{\alpha})^2-2i(\frac{1}{\alpha})+2=\frac{2-2i\alpha-\alpha^2-2i\alpha^3}{\alpha^4}=\frac{P(\alpha)}{\alpha^4}$

ومنه : $P(\frac{1}{\alpha})=0$ لأن $P(\alpha)=0$

2-التحقق أن : $1+i$ و $-1+i$ جذرين لكثير الحدود $P(z)$.

$1+i$ و $-1+i$ جذرين لكثير الحدود $P(z)$ معناه $P(1+i)=0$ و $P(-1+i)=0$

* $P(1+i)=2(1+i)^4-2i(1+i)^3-(1+i)^2-2i(1+i)+2$

$=2(-4)-2i(2i)(1+i)-2i-2i(1+i)+2=0$

* $P(-1+i)=2(-1+i)^4-2i(-1+i)^3-(-1+i)^2-2i(-1+i)+2$

$=2(4)-2i(-2i)(-1+i)+2i-2i(-1+i)+2=0$

3-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ثم كتابة الحلول على الشكل الأسي

من الجواب السابق نستنتج أن : $1+i$ ومقلوبه $\frac{1-i}{2}=\frac{1}{1+i}$ حلا أيضا

ونستنتج أيضا أن: $-1+i$ ومقلوبه $\frac{-1-i}{2}=\frac{1}{-1+i}$ حلا أيضا

وعليه حلول المعادلة $P(z)=0$ هي: $1+i$ ، $-1+i$ ، $\frac{1-i}{2}$ و $\frac{-1-i}{2}$

4- تعيّن m حتى يكون الرباعي ABCD مربعا.

الرباعي ABCD مربعا معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ومعناه $z_C-z_D=z_B-z_A$

$z_C-z_D=z_B-z_A$ تكافئ $-m=-2$ ومنه $m=2$

القسم2:التمارين المتعلقة بالتحويلات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين16: دورة 2018 م1

1-حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$: $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

$\Delta=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times1=-1=i^2$ و منه المعادلة تقبل حليّن هما: $z_1=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ و $z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

2-كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

$$z_A=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

$$z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=1e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=z_A$ وتكافئ $\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^n=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ومنه : $\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ وعليه $n=12k+2$ حيث k عدد طبيعي.

3-أ) التحقق أن : $\dfrac{z_B}{z_C}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ وتحديد طبيعة المثلث OBC.

لدينا: $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{z_B}{\overline{z_B}}=e^{\frac{2\pi}{6}i}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ لأن $z_C=\overline{z_B}=e^{-\frac{\pi}{6}i}$

لدينا: $\dfrac{z_B}{z_C}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ تكافئ $\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ وتكافئ هندسيا $\begin{cases}OB=OC.....(1)\\(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi.....(2)\end{cases}$

من الجملة السابقة نستنتج أن المثلث OBC متقايس الأضلاع.

ب) استنتاج أن C صورة B بدوران r و تعيين عناصره المميزة.

لدينا من الجواب السابق $\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ وتكافئ $z_B-z_O=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_C-z_O)...(*)$

العبارة (*)تعني أن C صورة B بدوران r والذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

4)تعيين طبيعة المجموعة (γ) ثم تعيين صورتها بالدوران r.

*لدينا (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=\left|\bar{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

العبارة $|z|=\left|\bar{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ تكافئ $|z_M-z_O|=\left|\bar{z}-\overline{z_B}\right|$ وتكافئ $|z_M-z_O|=\left|\overline{z-z_B}\right|$

وتكافئ $|z_M-z_O|=|z_M-\overline{z_B}|=|z_M-z_C|$ لأن $z_C=\overline{z_B}$ وتعني هندسيا $OM=CM$

وعليه مجموعة النقط (γ) هي حامل محور قطعة المستقيم $[OC]$.

* صورتها (γ) بالدوران هي المستقيم المحوري القطعة المستقيمة $[OB]$ لأن B هي صورة C بالدوران r و صورة O هي نفسها لأنها مركز الدوران و هي نقطة صامدة.

التمرين17: دورة 2018 م2

I)حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ التالية: $(\bar{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$

$(\bar{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$ تكافئ $(\bar{z}-4+i)=0$ أو $(z^2-4z+5)=0$

وتكافئ $\bar{z}=4-i$ أو $z^2-4z+4=-1$

وتكافئ $z=4+i$ أو $(z-2)^2=i^2$

وتكافئ $z=4+i$ أو $z=2+i$ أو $z=2-i$

وعليه حلول المعادلة هي : $z=4+i$ أو $z=2+i$ أو $z=2-i$

II-1) التحقق أن: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$

لدينا: $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$ ومنه: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4+i-2-i}{2-i-2-i}=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}=i$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

لدينا: $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n=(i)^n$ ومنه $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n=\arg(i)^n=\frac{n\pi}{2}$

ونعلم أن: $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا معناه $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$

وعليه $\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $n=2k+1$ حيث n عدد طبيعي

2) تبيان أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و حساب z_D.

لدينا: D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ ....(s)

الجملة (s) تكافئ $\begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ ومعناه المثلث ABD متقايس الأضلاع.

من الجملة (s) نستنتج أن D صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$

وعليه الجملة (s) تكافئ $(z_D - z_A) = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_B - z_A)$ أي $z_D = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_B - z_A) + z_A$

ومنه : $z_D = 2\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 2 + i = 3 + i(\sqrt{3}+1)$

3) حساب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD

G مركز ثقل المثلث ABD معناه $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_D}{3} = \dfrac{9 + i(\sqrt{3}+3)}{3}$

تعيّين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحوّل G إلى D.

التشابه المباشر الذي مركزه A ويحوّل G إلى D معرف بالعلاقة:

$(z_D - z_A) = ke^{\theta i}(z_G - z_A)$ ومعناه $\dfrac{(z_D - z_A)}{(z_G - z_A)} = ke^{\theta i}$

لدينا: $\dfrac{(z_D - z_A)}{(z_G - z_A)} = \dfrac{3 + i(\sqrt{3}+1) - 2 - i}{\frac{9 + i(\sqrt{3}+3)}{3} - 2 - i} = \dfrac{3 + 3i(\sqrt{3})}{3 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$

نستنتج أن : نسبة التشابه هي : $k = \sqrt{3}$ وزاويته هي: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

4) تعييّن مجموعة النقط (Γ)

لدينا مجموعة النقط M ذات اللاحقة z تحقق : $\text{Arg}\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

العبارة $\text{Arg}\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ تكافئ $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MG}) = \pi + 2k\pi$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي القطعة المستقيمة $[CG]$ باستثناء النقطتين C و G

التمرين18: دورة 2017 م1

I)حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$

المعادلة تكافئ $(z+2)=0$ أو $z^2-4z+8=0$ وتكافئ $z=-2$ أو $(z-2)^2=(2i)^2$

أي $z=-2$ أو $z=2-2i$ أو $z=2+2i$ ومنه الحلول هي: $\{2-2i;2+2i;-2\}$.

II-1)كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

$$z_A=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$ و $$z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

2) تعيين z_D لاحقة النقطة D

النقطة B مركز ثقل المثلث ACD معناه $3z_B=z_A+z_C+z_D$ أي $z_D=3z_B-z_A-z_C=6+8i$

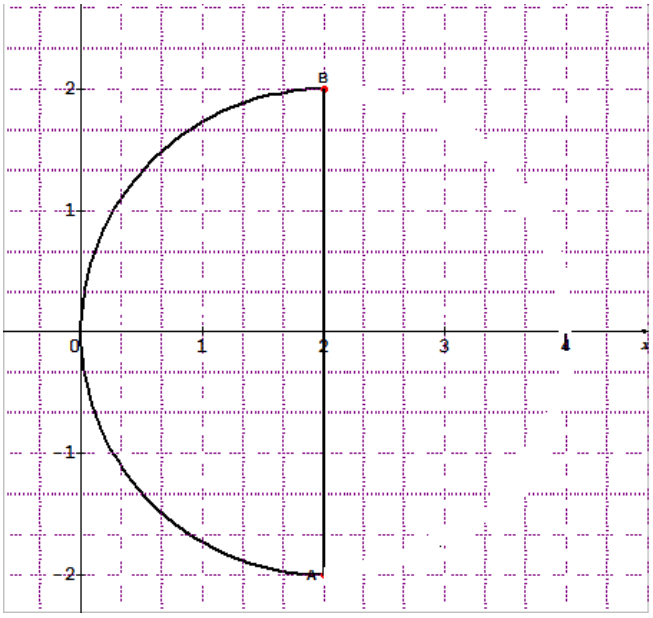
3)التحقق أن المبدأ O ينتمي للمجموعة (Γ) ثم تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وإنشائها

(Γ) للنقط M(z) معرفة كمايلي: $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

النقطة O تنتمي لـ(Γ) معناه $\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$

لدينا: $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{4}i}}\right)=\arg\left(e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})i}\right)=\arg\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)=\frac{\pi}{2}$

*لدينا: $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$ تكافئ $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}$



ومنه :مجموعة النقط (Γ) هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ والذي يشمل المدأ O.

4)تعيين طبيعة المجموعة (Γ')

لدينا (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

العبارة المركبة للتحاكي h هي:

$z'=2z+(1-2)z_C$ أي $z'=2z+2$

لتعيين المجموعة (Γ') نبحث عن صور النقط O: و A و B بالتحاكي h

لدينا:صورة المبدأ O هي النقطة O' حيث:

$z_{O'}=2z_O+2=2$

صورة المبدأ A هي النقطة A' حيث: $z_{A'}=2z_A+2=6-4i$

صورة المبدأ B هي النقطة B' حيث: $z_{B'}=2z_B+2=6+4i$

(Γ')صورة (Γ) بالتحاكي h هي نصف دائرة قطرها $[A'B']$ الذي يشمل النقطة O'.

التمرين19: دورة 2017 م2

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة

السؤال	ص أو خ	التعليل
1	صحيحة	من أجل $z=-\frac{1}{2}+i$ نجد: $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=\left(\frac{-\frac{1}{2}+i+1-i}{-\frac{1}{2}+i-i}\right)^2=1$
2	صحيحة	$(z+2)(\bar{z}+2)=(z+2)(\overline{z+2})=\lvert z+2\rvert^2$ خاصية
3	خاطئة	$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=\left[(e^{\frac{\pi}{3}i})\right]^{3n}=e^{n\pi i}=\begin{cases}1;n=2k\\-1;n=2k+1\end{cases}$
4	صحيحة	العبارة المركبة للتشابه S هي: $z'=3iz+1-3i$ لدينا: $S(C(\omega;3))=(C'(\omega';9))$ حيث $z_{\omega'}=3iz_{\omega}+1-3i=-2-3i$
5	صحيحة	لدينا: $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=e^{(\frac{\pi}{2}-\alpha)i}\times e^{(-\alpha)i}=e^{(\frac{\pi}{2}-2\alpha)i}$ ومنه: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ حيث k عدد صحيح

التمرين20:دورة 2017 الاستدراكية م1

I)حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

المعادلة تكافئ $(z-2)=0$ أو $z^2+2z+4=0$

وتكافئ $z=2$ أو $(z+1)^2=(\sqrt{3}i)^2$ أي $z=2$ أو $z=-1-\sqrt{3}i$ أو $z=-1+\sqrt{3}i$

ومنه الحلول هي: $\{-1+\sqrt{3}i;-1-\sqrt{3}i;2\}$.

II-1-أ)كتابة كلا من العددين z_B على الشكل الأسي

$$z_B=-1+i\sqrt{3}=2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

استنتاج الشكل الاسي للعدد المركب z_C

لدينا: $z_C=\overline{z_B}$ ومنه $z_B=2(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3})=2e^{\frac{-2\pi}{3}i}$

ب)تعيّين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC إنشاء النقط A،B و C.

لدينا: $AB=BC=CA=2\sqrt{3}$ معناه المثلث ABC متقايس الاضلاع

ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو مركز ثقله المبدأ O لأن: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=0$

ونصف قطرها هو : $r=OA=\lvert z_A\rvert=2$

2 -أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه S

العبارة المركبة المناسبة لـ S هي من الشكل: $z'=ke^{\theta i}z+(1-ke^{\theta i})z_\omega$

حيث: $k=\frac{1}{2}$ و $z_\omega=z_O=0$ و $\theta=\frac{2\pi}{3}$

ومنه: $z'=\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}z+(1-\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}i})z_O=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})z$

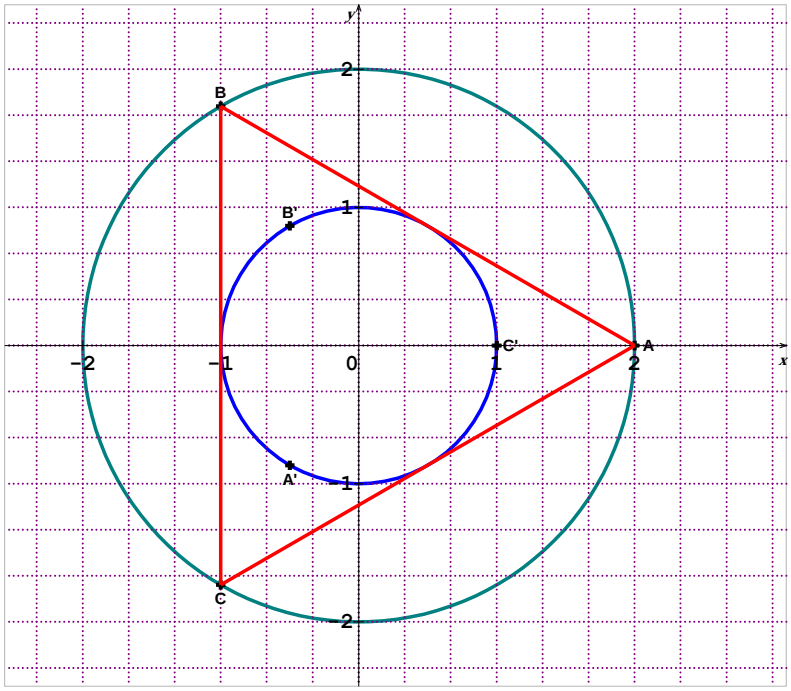
تعيّن لاحقة كل من النقط A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتشابه S

لدينا: $z_{A'}=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})z_A=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})2=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})=\frac{1}{2}z_B$

$$z_{B'}=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})z_B=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})=\frac{1}{2}z_C$$

$$z_{C'}=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})z_C=1=\frac{1}{2}z_A$$

انشاء في المعلم السابق النقط A'، B' و C'.



ب) حساب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

نعلم أن مساحة المثلث $A'B'C'$ هي: $S'=k^2S$ حيث $S=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ مساحة المثلث ABC

ومنه: $S'=\frac{1}{4}.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}(u.a)=\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$

التمرين21:دورة 2017 الاستدراكية م2

1)تعيّن نسبة وزاوية التشابه S

العبارة المركبة المناسبة لـ S هي: $z'-z_\omega=ke^{\theta i}(z-z_\omega)$ حيث k هي النسبة و θ الزاوية

لدينا S مركزه A ويحول B النقطة إلى النقطة C.

وعليه $z_C - z_A = ke^{\theta i}(z_B - z_A)$ أي

$$ke^{\theta i} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{7-i}{4+3i} = \frac{(7-i)(4-3i)}{|4+3i|^2} = \frac{25(1-i)}{25} = 1-i$$

ومنه نسبة التشابه $k = |1-i| = \sqrt{2}$ و زاويته $\theta = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2) كتابة على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-4-3i}{3-4i} = \frac{-i(-4i+3)}{3-4i} = -i = 1.e^{-\frac{\pi}{2}i}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومعناه $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$

وتفسيرها الهندسي هو: $AB = BC$ و $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

نستنتج مما سبق أن المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

3) تعيين z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I .

G إلى مركز ثقل المثلث ABC بـ: I إلى منتصف [AC].

وعليه $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$ و $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

تبيّان ان النقط B و G و I . على استقامة واحدة .

النقط ان B و G و I على استقامة واحدة معناه $\frac{z_G - z_B}{z_I - z_B} = \alpha$ حيث α عدد حقيقي

لدينا: $\frac{z_G - z_B}{z_I - z_B} = \frac{(1+7i)}{3}.\frac{2}{(1+7i)} = \frac{2}{3}$ ويمكن استعمال طرق أخرى

4) تحديد بدقة طبيعة الرباعي ABCD.

لدينا: I إلى منتصف [BD] (النقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I) و: I إلى منتصف [AC].

ومنه الرباعي ABCD متوازي أضلاع (القطران [BD] و [AC] متناصفان).....(1)

ولدينا المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي ABCD مرابعا.

5-أ) التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ).

لدينا: (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5\sqrt{2}$

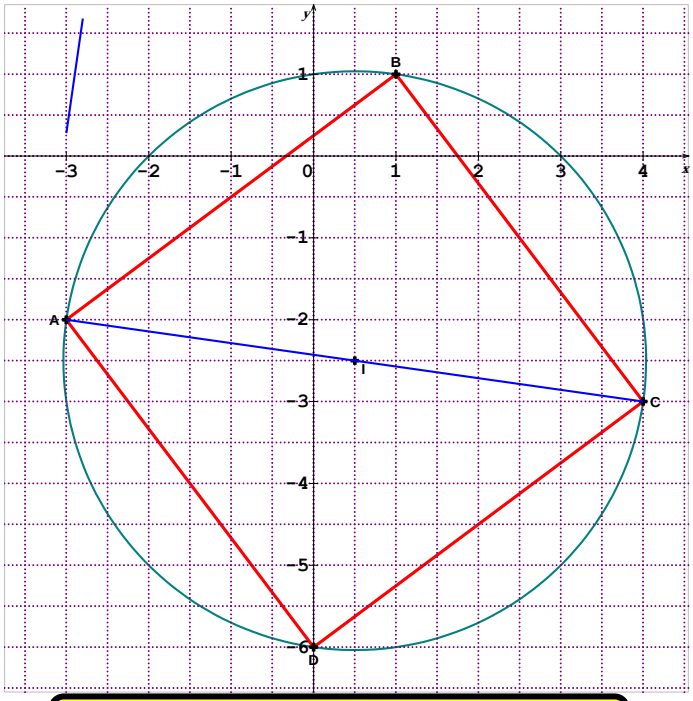
ومنه: النقطة C تنتمي إلى (Γ) معناه $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = 5\sqrt{2}$ محققة لأن $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = |z_A - z_C| = 5\sqrt{2}$

ب) تعيّين طبيعة المجموعة (Γ) وإنشئها.

*لدينا: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=5\sqrt{2}$ لأن I إلى منتصف [AC]

ومنه: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

وعليه (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.



التمرين22: دورة 2016 م1

1)حل المعادلة $z'=z$ في المجموعة $\mathbb{C}$

$z'=z$ تكافئ $\frac{z-2}{z-1}=z$ تكافئ $z^2-2z+2=0$ تكافئ $z=1-i$ أو $z=1+i$

2-أ)كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي

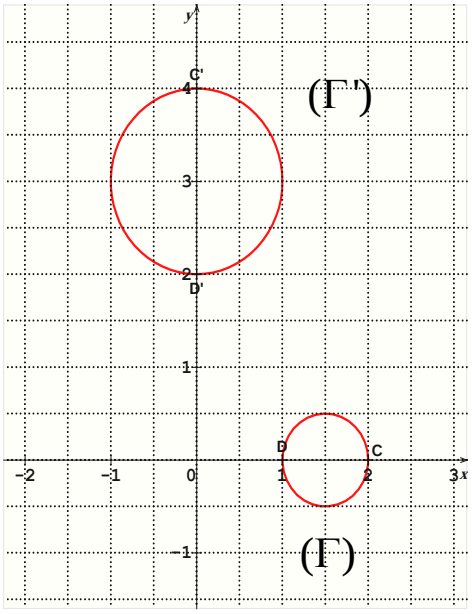
لدينا: $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$

ب)تبيان أن B صورة A بالدوران R الذي مركزه O وتعيين زاويته

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_2}{z_1}=e^{\frac{\pi}{2}i}$ وتكافئ $z_B-z_O=e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A-z_O)$...(*)

العبارة (*) تبيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) تعيين مجموعة النقط (Γ) ثم إنشاء (Γ)



(Γ)هي مجموعة النقط M(z) بحيث M'(z')تنتمي لمحور التراتيب(M'(z' ، z' تخيلي صرف)

$z'=\frac{z-2}{z-1}$ تكافئ $z'=\frac{z_M-z_C}{z_M-z_D}$ وتكافئ $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MD})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه مجموعة النقط (Γ)هي دائرة قطرها [CD]

4-أ)تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة

R: دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:H تحاكي مركزه O ونسبته 2

ومنه: S تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$(مبرهنة)

ب)كتابة العبارة المركبة للتحويل S

العبارة المركبة للتحويل S هي من الشكل: $z'=ke^{\theta i}z+(1-ke^{\theta i})z_\omega$

ولدينا: $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $z_\omega=0$ ومنه: $z'=2e^{\frac{\pi}{2}i}z$ أي $z'=2iz$

ج)تعيين وإنشاء المجموعة (Γ')

لدينا: (Γ') هي صورة (Γ)بالتحويل S

(Γ')هي دائرة قطرها [C'D'] حيث: $S(C)=C'$ و $S(D)=D'$

$S(C)=C'$ معناه: $z_{C'}=2iz_C=4i$ و $S(D)=D'$معناه $z_{D'}=2iz_D=2i$

التمرين23: دورة 2016 م2

1)حل المعادلة $(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

$(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$ تكافئ $(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$ أو $(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$

ومنه: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ أو $(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$ أي $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ أو $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

2-أ)كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=1(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=1.e^{\frac{\pi}{6}i}$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=1(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=1.e^{\frac{5\pi}{6}i}$ و $z_C=\overline{z_B}=1.e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

ب)تبيان أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول C إلى A تعيين عناصرة المميزة

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي: $z'-z_\omega=a(z-z_\omega)$

S مركزه B ويحول C إلى A ومنه: $z_A-z_B=a(z_C-z_B)$

أي $a=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i}=\frac{2\sqrt{3}}{-2i}=\sqrt{3}i$

العناصر المميزة للتشابه S هي المركز B والنسبة $k=|a|=\sqrt{3}$ والزاوية $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{2}$

3-أ) تعيين لاحقة النقطة D

لدينا: الرباعي ABCD متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي $z_C-z_D=z_B-z_A$

ومنه $z_D=z_C-z_B+z_A=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

تعييّن بدقة طبيعة الرباعي ABCD

لدينا: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$...(1) ولدينا $\frac{\pi}{2}$ هو قيسا للزاوية $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ لأن $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$.....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي ABCD مستطيلا.

العبارة (*) تبيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تعيين مجموعة النقط (E).

الطريقة1 الهندسية :

$|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_C|$ لأن $|z-z_C|=|\bar{z}-z_B|=|\bar{z}-\bar{z_C}|=|\overline{z-z_C}|$

$|z-z_A|=|z-z_C|$ تكافئ $AM=CM$ وعليه مجموعة النقط (E) هي حامل محور القطعة $[AC]$

الطريقة2 الجبرية:

نضع: $z=x+yi$ ومنه $\bar{z}=x-yi$ ومنه: $|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$ تكافئ $|z-z_A|^2=|\bar{z}-z_B|^2$

وتكافئ $(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2$ وتكافئ $y=\sqrt{3}x$ (بعد التبسيط)

وعليه مجموعة النقط (E) هي المستقيم ذو المعادلة $y=-\sqrt{3}x$ (حامل محور القطعة $[AC]$)

ج) تعيين مجموعة النقط (Γ).

(Γ) هي مجموعة النقط M(z) والتي تحقق: $z=z_B+\sqrt{3}e^{\theta i}$ مع θ تمسح $\mathbb{R}$

لدينا: $z=z_B+\sqrt{3}e^{\theta i}$ تكافئ $z-z_B=\sqrt{3}e^{\theta i}$ وتكافئ $|z-z_B|=|\sqrt{3}e^{\theta i}|$ أي $BM=\sqrt{3}$

وعليه مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

التحقق أن النقطة A تنتمي للمجموعة (Γ)

A تنتمي للمجموعة (Γ) معناه $BA=\sqrt{3}$

لدينا: $BA=|z_A-z_B|=|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ ومنه A تنتمي للمجموعة (Γ).

التمرين24: دورة 2016 م1 الاستدراكية

1)-أ) التحقق أن $P(2\sqrt{3})=0$

لدينا: $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$ ومنه: $P(2\sqrt{3})=(2\sqrt{3})^3-24\sqrt{3}=24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=0$

ب)إيجاد العددين الحقيقيين a و b

لدينا: $P(z)=(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)$ بعد التشر والتبسيط نجد:

$P(z)=z^3+(a-2\sqrt{3})z^2+(b-2a\sqrt{3})z-2\sqrt{3}b....(1)$ ولدينا: $P(z)=z^3-24\sqrt{3}...(2)$

بمطابقة (1) مع (2) نجد: $(a-2\sqrt{3})=0$ و $-2\sqrt{3}b=-24\sqrt{3}$ ومنه: $a=2\sqrt{3}$ و $b=12$

طريقة2:تذكير الجداءات الشهيرة $(\alpha^3-\beta^3)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha.\beta+\beta^2)$

$z^3-24\sqrt{3}=z^3-(2\sqrt{3})^3=(z-2\sqrt{3})(z^2+2\sqrt{3}z+12)$ ومنه: $a=2\sqrt{3}$ و $b=12$

ج)حل المعادلة $P(z)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

$P(z)=0$ معناه $(z-2\sqrt{3})(z^2+2\sqrt{3}z+12)=0$ معناه $(z-2\sqrt{3})=0$ أو $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$

ومعناه $z=2\sqrt{3}$ أو $(z+\sqrt{3})^2=-9$ أي $z=-\sqrt{3}-3i$ أو $z=-\sqrt{3}+3i$)

وعليه الحلول هي : $2\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}-3i$ أو $-\sqrt{3}+3i$

2-أ)كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}-3i}=\frac{3\sqrt{3}-3i}{-6i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب) تبيان أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول B إلى C وتعيين زاويته

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ (الشكل الأسي) وعليه:

$$z_C-z_A=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_B-z_A).....(*)$$

من العبارة (*) نستنتج أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول B إلى C و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ج)استنتاج طبيعة المثلث ABC

الكتابة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ تعني $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}$

وتعني $AC=AB$ و $\frac{\pi}{3}$ قيسا للزواية الموجة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

د)تعيين z_D لاحقة النقطة D و تحديد بدقة طبيعة الرباعي ABDC

*لدينا: D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$

ومنه: $z_D=z_C+z_{\overrightarrow{AB}}$ أي $z_D=z_C+z_B-z_A=2\sqrt{3}-6i$ ومنه: $z_D=2\sqrt{3}-6i$

*لدينا: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ لأن D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$....(1)

المثلث ABC متقايس الأضلاع....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي ABDC معين.

3)تعيين مجموعة النقط (Γ)

لدينا: (Γ) هي مجموعة النقط M(z) بحيث: $\arg(\frac{z}{z}) = 2k\pi$ حيث $z \neq 0$

$\arg(\frac{z}{z}) = 2k\pi$ تكافئ $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})$ قيسا للزواية الموجة $2k\pi$ حيث $M'(\bar{z})$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O

التمرين25: دورة 2016 م2 الاستدراكية

1-أ)اثبات ان المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$

المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$ لأن:

$$(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=2\bar{z}.\bar{z}^2-2\bar{z}.\bar{z}+2\bar{z}+5\bar{z}^2-5\bar{z}+5=2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$$

ب) حل المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$ معناه $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$

ومنه: $(2\bar{z}+5)=0$ أو $(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$

وعليه: $\bar{z}=-\frac{5}{2}$ أي $z=-\frac{5}{2}$ أو $(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$ تكافئ $(\bar{z}-\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}$

وتكافئ $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أي $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

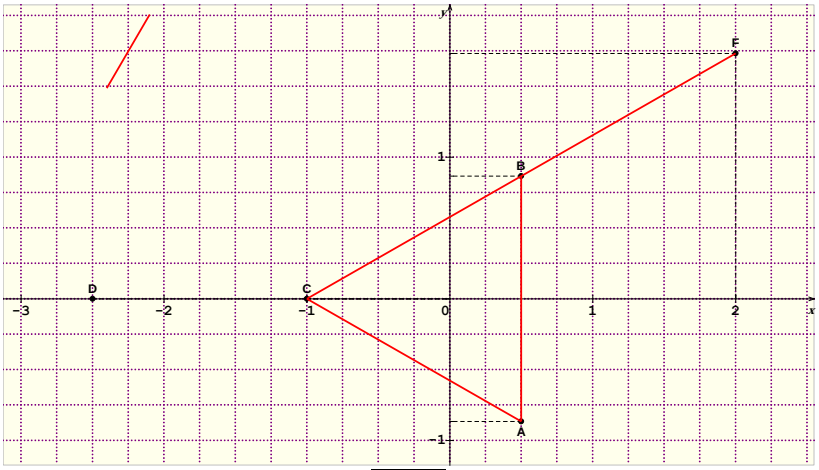
وعليه الحلول هي: $z=-\frac{5}{2}$ أو $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2-أ)كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

لدينا: $z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=1.e^{\frac{5\pi}{6}i}$ و $z_B=\overline{z_A}=1.e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

ب) إنشاء النقط A ، B ، C و D

$z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_C=-1$ و $z_D=-\frac{5}{2}$



ج)إثبات أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

لدينا: $z_B - z_C = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$....(1)

لدينا: $z_B(z_A - z_C) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$...(2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

د)استنتاج طبيعة المثلث ABC

$z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$ تكافئ $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = z_B$ تكافئ $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أي $AC = BC$ و $\frac{\pi}{3}$ قيسا للزاوية الموجه $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ منه المثلث ABC متقايس الأضلاع

3-إنشاء النقطة F ثم تحديد طبيعة المثلث AFC

النقطة F صورة النقطة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2

لدينا $CF = 2CA$ ومنه: $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}$ (انظر الشكل 2-ب)

تعيين طبيعة المثلث AFC

$\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}$ أي $CF = 2CB = 2AB$ ومنه : $AB = \frac{1}{2}CF$ وعليه المثلث AFC قائم في A.

4-تعيين مجموعة النقط (Γ)

لدينا: $z + 1 = kz_B$ تكافئ $z_M - z_C = ke^{\frac{\pi}{3}i}$ وتكافئ $\arg(z_M - z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه: (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدأه C وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق: $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

التمرين26: دورة 2015 م1

I)تعيين العددين المركبين α و β.

$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} - \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$...(*)تكافئ $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ \overline{2\alpha + \beta} = \overline{-3 - 2i\sqrt{3}} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3.....(1) \\ 2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$...(2)

بجمع المعادلتين (1) و(2) طرف لطرف نجد: $4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3}$

ومنه: $\alpha = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ من المعادلة(1)نجد: $\beta = 2\alpha + 3$ وعليه: $\beta = i\sqrt{3}$

II-1)-أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الاسي.

$z_A = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$ $z_C = z_A.e^{-\frac{\pi}{3}i} = \sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}.e^{-\frac{\pi}{3}i} = \sqrt{3}e^{(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})i} = \sqrt{3}e^{(\frac{\pi}{2})i}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

لدينا: $z_A = z_C.e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{3}i}$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا معناه معناه $\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi$ أي: $n = 6k+3$ و $k \in \mathbb{N}$.

ب)التحقق أن العدد المركب : $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{2015} + \left(e^{-\frac{5\pi}{6}i}\right)^{1962} - \left(e^{(\frac{\pi}{2})i}\right)^{1435} 2\left(e^{\frac{7\pi}{6}i}\right) + \left(e^{\pi i}\right) - \left(e^{(\frac{-\pi}{2})i}\right) = -\sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R}$$

2-أ)تحديد نسبة وزاوية التشابه المباشر S

العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي من الشكل: $z' - z_\omega = ke^{\theta}(z - z_\omega)$

لدينا المركز هو O و S يحوّل D إلى A

وعليه تكون العبارة المركبة لـ S من الشكل: $z_A = ke^{\theta} z_D$

ومنه : $ke^{\theta} = \frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}}{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}.e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}.} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{\frac{7\pi}{12}i}$ وعليه النسبة $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$ الزاوية $\theta = \frac{7\pi}{12}$.

ب) كتابة العدد $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري .استنتاج القيمة المضبوطة

لدينا: $\frac{z_A}{z_D} = \frac{z_A.\overline{z_D}}{z_D.\overline{z_D}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}+i)(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\right]$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos(\frac{7\pi}{12})$ و $\sin(\frac{7\pi}{12})$

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\right]$.....(1)

ومن الجواب 2-أ) لدينا: $\frac{z_A}{z_D} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{\frac{7\pi}{12}i} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sqrt{\frac{3}{2}}\sin(\frac{7\pi}{12})$.....(2)

بالمطابقة بين الشكلين (1) و(2) نستنتج أن:

$\sqrt{\frac{3}{2}}\cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\sqrt{3})$ وعليه: $\cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\sqrt{3}).\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})$ وعليه: $\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3}).\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

3) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ **التي تحقق:** $z=k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i}$ **حيث:** k **يمسح** $\mathbb{R}^+$.

لدينا: $z=k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i}$ تكافئ $z=k\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}.e^{\frac{7\pi}{12}i}=k\sqrt{2}.e^{\frac{5\pi}{6}i}$

تكافئ $z-z_o=e^{\frac{5\pi}{6}i}$ معناه $\arg(z-z_o)=\frac{5\pi}{6}$

ولدينا: $\arg(z_A)=\frac{5\pi}{6}$ ومنه $\arg(z-z_o)=\arg(z_A)$ أي $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}$

وعليه مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف المستقيم $[OA)-\{O\}$

التمرين27: دورة 2015 م2

1) أ)كتابة كلا من z_B ، z_C **على الشكل الأسي.**

لدينا: $z_B=\overline{-z_A}=\overline{-2e^{i\frac{\pi}{6}}}=2e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_C=-(z_A+z_B)=-(z_A-\overline{z_A})=-2(2i\,Im(z_A))=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

ب)استنتاج أن النقط A ، B **و** C **تنتمي إلى دائرة** (γ) **يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.**

$|z_B|=|z_A|=|z_C|=2$ معناه $OA=OB=OC$

أي النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 2 .

جـ) إنشاء الدائرة (γ) **والنقط** A، B و C.

توضيح تجدون الإنشاء في آخر حل التمرين

لإنشاء النقط A ، B و C نستعمل الاحداثيات القطبية: $A(2;\frac{\pi}{6})$، $B(2;\frac{5\pi}{6})$ و $C(2;\frac{-\pi}{2})$

2) أ)التحقق أن: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

لدينا: $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=-2i$

ومنه: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=\frac{-\sqrt{3}+i-(-2i)}{-\sqrt{3}+i-(\sqrt{3}+i)}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ب)استنتاج ان المثلث ABC **متقايس الأضلاع وان** O **مركز ثقل هذا المثلث**

العلاقة: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ تعني أن: $\left|\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}$

تعني أن $AB=BC$ وقيس الزاوية $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ هو $\frac{\pi}{3}$

ومنه :**المثلث** ABC متقايس الأضلاع.

لدينا: $z_O=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$ معناه $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ و معناه النقطة O مركز ثقل هذا المثلث

ج)تعيين وإنشاء مجموعة النقط (E).

لدينا: $(E)=\left\{M(z);|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|\right\}$

$|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$ تكافئ $|z_M-z_O|=|z_M-z_A|$ وتكافئ $MO=MA$

مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $MO=MA$ هي محور القطعة $[OA]$

الإنشاء: أنظر الشكل في الجواب ب-1). تجدون الإنشاء في آخر حل التمرين

3) أ)تعيين زاوية الدوران r.

العبارة المركبة للدوران r هي من الشكل: $z'-z_\omega=e^{\theta}(z-z_\omega)$

لدينا المركز هو O و S يحوّل C إلى A وعليه تكون العبارة المركبة لـ r من الشكل: $z_A=e^{\theta}z_C$

ومنه: $e^{\theta}=\frac{z_A}{z_C}=\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{-\frac{\pi}{2}i}}=e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})i}=e^{(\frac{2\pi}{3})i}$ ومن زاوية الدوران هي $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

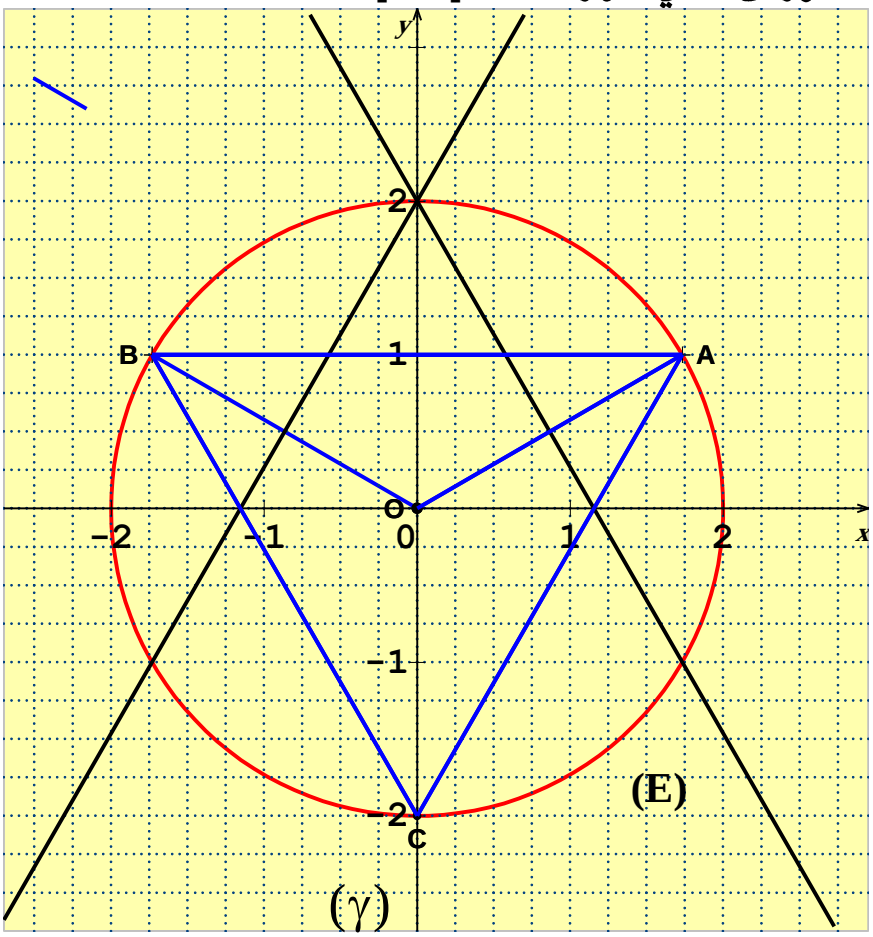
ب)إثبات أن صورة (E) **بالدوران r هي محور القطعة** $[OB]$

العبارة المركبة للدوران هي: $z'=e^{\frac{2\pi}{3}i}z$

لدينا صورة المركز O للدوران r هي O لأن المركز نقطة صامدة.

صورة النقطة A بالدوران r هي B لأن $z_B=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_A=2e^{\frac{2\pi}{3}i}.e^{\frac{\pi}{6}i}=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

وعليه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$



التمرين28: دورة 2014 م1

1) حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

لدينا: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$ تكافئ $(z-3\sqrt{2})^2=-18$ تكافئ $(z-3\sqrt{2})^2=(3\sqrt{2}i)^2$

ومنه : $z-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}i$ أو $z-3\sqrt{2}=-3\sqrt{2}i$ أي $\boxed{z=3\sqrt{2}(1+i)}$ أو $\boxed{z=3\sqrt{2}(1-i)}$

2 -أ) كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ **على الشكل الأسي**

لدينا: $z_A=3\sqrt{2}(1+i)=3\sqrt{2}.\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=6e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $z_B=6e^{-\frac{\pi}{4}i}$ لأن: $z_B=\overline{z_A}$

$(1+i)z_A=3\sqrt{2}(1+i)^2=6\sqrt{2}.i=6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

ب) حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

لدينا من الجواب السابق $(1+i)z_A=6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$ وعليه: $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{2014}=e^{\frac{2014\pi}{2}i}=e^{1007\pi i}=-1$

ج) تبيّان أن النقط O ، A ، B و C **تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها** D **وتعيين نصف قطرها**

نبين أن $DO=DA=DB=DC$

لدينا: $DO=|z_D-z_O|=|3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$ ، $DA=|z_D-z_A|=|-3\sqrt{2}i|=3\sqrt{2}$

$DB=|z_D-z_B|=|3\sqrt{2}i|=3\sqrt{2}$ ، $DC=|z_D-z_C|=|-3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$

ومنه النقط **O** ، A ، B و C تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $3\sqrt{2}$

د) حساب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ **وإيجاد قيسا للزاوية** $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ **وتعيين طبيعة الرباعي** OACB.

لدينا: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{3\sqrt{2}(1-i)-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i)-6\sqrt{2}}=\frac{-(1+i)}{(-1+i)}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$

العلاقة $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i$ تعني $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{\frac{\pi}{2}i}$ أي قيس الزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ هو $\frac{\pi}{2}$

من الجواب جـ) ود) السابقين نستنتج أن الرباعي OACB مربعا لأن:

القطران [OC] و[AB] متناصفان وحاملاهما متعامدان و قيس الزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ هو $\frac{\pi}{2}$

3-أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R

لدينا: R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

العبارة المركبة للدوران هي: $z'-z_O=1.e^{\theta i}(z-z_O)$ عليه: $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}.z$

ب) تعيين لاحقة النقطة C' **صورة** C **بالدوران** R **ثم التحقق أن النقط** A ، C **و** C' **في استقامية**

لدينا: $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}.z$ ومنه: $z_{C'}=e^{\frac{\pi}{2}i}.z_C=6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=6\sqrt{2}i$

لدينا: $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC'}$ لأن: $z_{\overrightarrow{AC}}=3\sqrt{2}(1-i)=-3\sqrt{2}(1-i)=-z_{\overrightarrow{AC'}}$

ومنه النقط C، A و C' في استقامية

ج)تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R وتحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R.

لدينا: $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}.z$ ومنه: $z_{A'}=e^{\frac{\pi}{2}i}.z_A=e^{\frac{\pi}{2}i}.6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=6\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-z_B$

لدينا: $R(O)=O$ ، $R(A)=A'$ ، $R(C)=C'$ و $R(B)=A$

ومنه : صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هي المربع $OAC'A'$.

التمرين29: دورة 2014 م2

1) حل المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ تكافئ $(z-i)=0$ أو $(z^2-2z+5)=0$

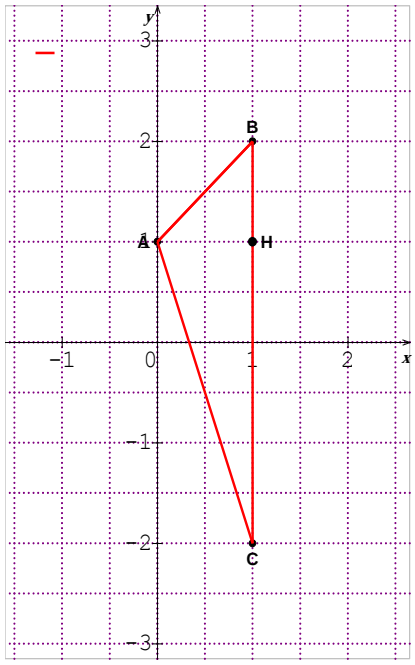
تكافئ $z=i$ أو $(z^2-2z+1)=-4$

تكافئ $z=i$ أو $(z-1)^2=(2i)^2$ أي $z=1-2i$ أو $z=1+2i$

الخلاصة: الحلول هي : $z=i$ أو $z=1-2i$ أو $z=1+2i$

2-أ) أنشاء النقط A، B و C.

لدينا: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$



ب) إيجاد z_H لاحقة النقطة H

لدينا: النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (AB)

ومنه: $z_H=1+i$ لأن: H لها نفس الفاصلة مع B ونفس الترتيب مع A

ج) حساب مساحة المثلث ABC

مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2}$ القاعدة×الارتفاع أي: $S_{ABC}=\frac{AH.BC}{2}$

لدينا: $AH=|z_H-z_A|=|1|=1$ و $BC=|z_C-z_B|=|4i|=4$

ومنه: $S_{ABC}=\frac{1.4}{2}=2cm^2$

3-أ) تعيين الكتابة المركبة للتشابه S

العبارة المركبة للتشابة الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي:

$z'=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z+(1-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i})z_A$ وبعد التبسيط نجد: $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i$

ب) تبيان أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

بما أن نسبة التشابه المباشر S هي $\frac{1}{2}$ فإن: مساحة صورة المثلث ABC هي: $S'=(\frac{1}{2})^2.S_{ABC}=\frac{1}{2}cm^2$

4) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z|=|iz+1+2i|$

لدينا: $|z|=|iz+1+2i|$ تكافئ $|z|=|z-(-2+i)|$

بوضع: $M(z)$ ، $O(0)$ و $D(-2+i)$ فإن العبارة السابقة تكتب على الشكل: $OM=DM$

وعليه مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة المستقيمة

التمرين30: دورة 2013 م1

1)التحقق أن $-2-3i$ هو حلا للمعادلة (E) و إيجاد الحل الآخر

*لدينا: (E) ..... $z^2+4z+13=0$

$z_1=-2-3i$ حلا للمعادلة (E) معناه $z_1^{\,2}+4z_1+13=0$

لدينا: $(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4-9+12i-8-12i+13=0$

*المعادلة (E) معاملاها حقيقية و $\Delta'=b'^2-ac=-9$ أي $\Delta'\prec 0$ ومنه: $z_2=\overline{z_1}=-2+3i$

2-أ)تبيان أن $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

لدينا: S تشابه مركزه A ويحول $M(z)$ إلى $M'(z')$

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z'=az+(1-a)z_A$ حيث: $a=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{1}{2}i$ و $z_A=-2-3i$

ومنه: $z'=\frac{1}{2}iz+(1-\frac{1}{2}i)(-2-3i)=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

ب)حساب z_C لاحقة النقطة C .

لدينا: C صورة النقطة B بالتشابه S ومنه: $z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$

3-أ)تبيّان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب حسابهما

D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين معناه: $\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

النقطة D تحقق العلاقة الشعاعية $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}...(1)$

ومنه: (1) تكافئ $-2\overrightarrow{DA}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})=\vec{0}$ تكافئ $-2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

تكافئ $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ أي أن: $\alpha=-3$ و $\beta=1$

الخلاصة: D مرجح النقطتين A و B المرفقين بمعاملين -3 و 1 على الترتيب.

ب) حساب z_D لاحقة النقطة D

لدينا: D مرجح الجملة $\{(A;-3),(B;1)\}$ ومنه: $z_D=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}=\frac{-3(-2-3i)+1(i)}{-3+1}=-3-5i$

ج)تبيان أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD

لدينا: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-3-5i)-(-2-3i)}{(-4-2i)-(-2-3i)} = \frac{-1-2i}{-2+i} = i$

*لدينا: $\left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ تعني $AD = AC$ ..... (1) $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ تعني $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ..... (2)

من (1) و(2) نجد: المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين

التمرين31: دورة 2013 م2

1) حل المعادلة (1) في المجموعة $\mathbb{C}$

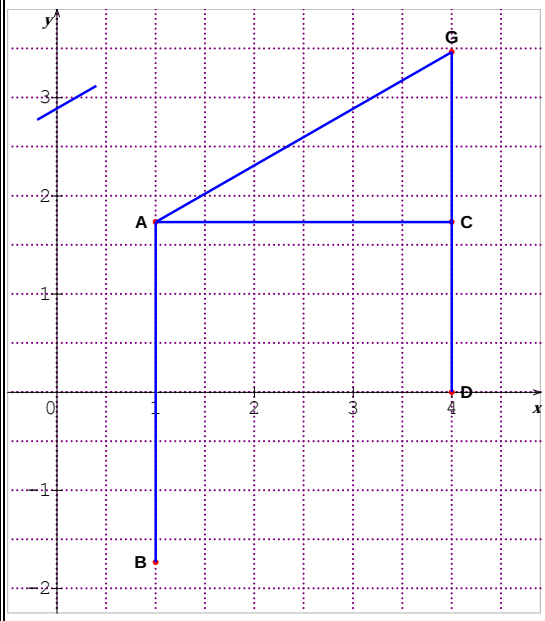
لدينا: $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$.....(1) حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Delta' = b'^2 - ac = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\cos^2\alpha - 4$ أي $\Delta' = 4\cos^2\alpha - 4 = -4(1-\cos^2\alpha) = (2i\sin\alpha)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما: $z_1 = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ ، $z_2 = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

2) تبيّان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ يكون: $z'' = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و $z' = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{2013} = e^{\frac{4026\pi}{3}i} = e^{0i} = 1$



2-أ)إنشاء النقط A، B و C .

لإنشاء النقطتين A، B نستعمل الإحداثيات القطبية

لدينا: $z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ومنه $z_C = 4 + \mathrm{Im}(z_A)$ و $z_G = 4 + 2\,\mathrm{Im}(z_A)$

ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وتعيين نسبته وزاويته.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$.....(*) تكافئ $(z_C - z_A) = \frac{i\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$

المساواة الأخيرة تعني أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ج) تعيين لاحقة النقطة G وانشاءها

لدينا: G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$ ومنه: $z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{1-1+2}=4+2i\sqrt{3}$

د)تعيين z_D لاحقة D بحيث يكون ABDG متوازي أضلاع

ABDG متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GD}$ معناه $z_D-z_G=z_B-z_A$ معناه $z_D=z_G+z_B-z_A=4$.

التمرين32: دورة 2012 م2

1-أ) التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود P(z):

لدينا: $P(6)=6^3-12(6)^2+48(6)-72=0$ ومنه 6 هو جذرا لكثير الحدود P(z)

ب) إيجاد العددين الحقيقيين α و β.

لدينا: $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$ ومنه: $P(z)=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta...(1)$

ولدينا: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72...(2)$

بالمطابقة بين الشكلين (1)و(2) نجد: $\alpha-6=-12$ ومنه $\alpha=-6$ و $-6\beta=-72$ ومنه $\beta=12$

وعليه يكون: $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$

ج)حل المعادلة $P(z)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

$P(z)=0$ معناه $(z-6)(z^2-6z+12)=0$

معناه $(z^2-6z+12)=0$ أو $(z-6)=0$ معناه $(z-6)(z^2-6z+12)=0...(*)$ أو $z=6$

نحل المعادلة (*) باستعمال المميز المختصر

لدينا: $\Delta'=b'^2-ac=(-3)^2-(1)(12)=-3=(\sqrt{3}i)^2$

المعادلة (*) تقبل حليّن مترافقين هما: $z'=3-\sqrt{3}i$ و $z''=3+\sqrt{3}i$

2-أ)كتابة كلّ من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

لدينا: $z_A=6=6(1+0i)=6e^{0i}$ ، $z_B=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_C=\overline{z_B}=2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

ب)كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-3-\sqrt{3}i}{6-3+\sqrt{3}i}=\frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الأسي

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا من الجواب السابق: $\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=1$ معناه $AB=AC$

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ معناه $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3-أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S

العبارة المركبة للتشابه هي: $z'=az+(1-a)z_C$ حيث: $a=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}=i\sqrt{3}$

ومنه : $z'=i\sqrt{3}z+(1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})=i\sqrt{3}z-i4\sqrt{3}$

ب)تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالتشابه S

لدينا: $z'=i\sqrt{3}z-i4\sqrt{3}$ ومنه : $z_{A'}=i\sqrt{3}z_A-i4\sqrt{3}=i\sqrt{3}(6)-i4\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$

ج) تبيان أن النقط A، B و A' في استقامية .

النقط A، B و A' في استقامية معناه $z_{\overrightarrow{A'B}}=kz_{\overrightarrow{AB}}$

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-3+i\sqrt{3}$ و $z_{\overrightarrow{A'B}}=z_B-z_{A'}=3-i\sqrt{3}=-z_{\overrightarrow{AB}}$

التمرين33: دورة 2011 م2

1-أ-كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i+i}{2+3i+i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$$

ب-تعيين طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}\text{ و }\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

نستنتج مما سبق أن: $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

2-أ)تعيين طبيعة التحويل T وتحديد عناصره المميزة

من العبارة المركبة للتحويل T لدينا: $a=i$ و $b=-1-i$ ومنه التحويل T دوران لأن $|a|=1$

العناصر المميزة هي الزاوية $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$

والمركز هو A لأن: $z_A=\frac{b}{1-a}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{(-1-i)(1+i)}{2}=-i$

ب- تعيين صورة النقطة B بالتحويل T

$z'_B=iz_B-1-i=i(2+3i)-1-i=-4+i$ ومنه صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C

3-أ) بيان أن النقط A، B و D في استقامية

النقط A، B و D في استقامية معناه $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6+3i}{-4+2i} = \frac{(-6+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{3}{2}$$

ب)تعيين نسبة التحاكي h

العبارة المختصرة المركبة للتحاكي h هي:

$z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ حيث k هي نسبة التحاكي h ومنه: $k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$

ب)تعيين العناصر المميزة للتشابه S

العبارة المختصرة المركبة للتشابه S هي: $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$ حيث عدد مركب و $a = [r;\theta]$

$a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-6+3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{30i}{20} = 3i$ ومنه نسبة التشابه S هي $|a| = 3$ وزاوية هي $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$

التمرين34: دورة 2010 م1

1)كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

لدينا: $z_A = 1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $z_B = 3i = 3(0+i) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$

2) أ)تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z' = 2iz + 6 + 3i$

وهي من الشكل $z' = az + b$ حيث: $a = 2i$ و $b = 6+3i$

ومنه : نسبة التشابه S هي $|a| = 2$ وزاويته $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$ ومركزه B لأن: $z_B = \frac{b}{1-a} = 3i$

ب)تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه S

لدينا: $z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 2i(1+i) + 6 + 3i = 4 + 5i$

ج)استنتاج طبيعة المثلث ABC

زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$ المركز هو B أي: $ABC = \frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم في B.

3-أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D

لدينا: $z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$ ومنه: $z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2-2+2} = 5 + 3i$

ب)تعيين طبيعة الرباعي ABCD

الرباعي ABCD مستطيل لأن: $z_{\overline{BC}}(4+2i) = z_{\overline{AD}}(4+2i)$ والمثلث ABC قائم في B

4-أ) التحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ)

E تنتمي إلى (Δ) لأن: $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i-6-3i}{5+3i-6-3i} = 6 \in \mathbb{R}_+^*$

ب) إعطاء تفسيرا هندسيا لعمدة $\frac{z_B - z}{z_D - z}$

$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})$ معناه $\frac{z_B - z}{z_D - z} \in \mathbb{R}_+^*$ معناه $(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$

معناه النقط A، B و M في استقامة

تعيين المجموعة (Δ)

بما أنه من أجل كل نقطة M من المستوي النقط A، B و M في استقامة والنقطة E تنتمي لـ(Δ) فإن مجموعة النقط $(\Delta) = (BD) - BD$.

التمرين35: دورة 2010 م2

1) حل المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

$\Delta' = b'^2 - ac = 3^2 - 18 = -9 = (3i)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما: $z' = \frac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{3-3i}{1}$ و $z'' = \frac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{3+3i}{1}$

كتابة الحلين على الشكل الاسي

$z' = 3-3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z'' = 3+3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2-أ)تبيين أن A، B، C و D تنتمي للدائرة ذات المركز O

لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ ومنه: $OA = OB = OC = OD = 3\sqrt{2}$

ب) تعيين زاوية الدوران R

لدينا: $z_B - z_O = a(z_A - z_O)$ أي $z_B = az_A$ ومنه: $a = \frac{z_B}{z_A} = \frac{\overline{z_A}}{z_A} = \frac{(\overline{z_A})^2}{z_A.\overline{z_A}} = -i$

ومنه زاوية الدوران هي $\arg(a) = \arg(-i) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

ج) تبيين أن النقط A، O، C في استقامية وكذلك النقط B، O و D

النقط A، O، C في استقامية لأن $z_A = -z_C$ (متناظرتان بالنسبة للمبدأ O)

النقط B، O و D في استقامية لأن $z_D = -z_B$ (متناظرتان بالنسبة للمبدأ O)

د)استنتاج طبيعة الرباعي ABCD

الرباعي ABCD مربع لأن :

القطران [AC]، [BD] لهما نفس المنتصف المبدأ O ولأن: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}.\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} = 0$ و $AC = BD$

التمرين36: دورة 2008 م2

1-أ)ايجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $7+24i$

ليكن δ جذرا تربيعيا للعدد المركب $7+24i$ حيث $\delta = x+iy$

$\delta^2 = 7+24i$ تكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=7...(1) \\ x^2+y^2=|7+24i|=25...(2) \\ 2xy=24.....(3) \end{cases}$ من (1) و(2) نجد: $2x^2=32$ وعليه: $x=4$ أو $x=-4$

بتعويض $x=4$ في (3) نجد: $y=3$ أي $\delta=4+3i$ وبتعويض $x=-4$ في (3) نجد: $y=-3$ أي $\delta=-4-3i$

ب)تبيّان أن: $z^2+iz-2-6i=\left(z+\frac{i}{2}\right)^2-\frac{7+24i}{4}$

لدينا: $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2-\frac{7+24i}{4}=z^2+iz-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}-6i=z^2+iz-2-6i$

ج) استنتاج z_1 و z_2 حلّي المعادلة: $z^2+iz-2-6i=0$

$z^2+iz-2-6i=0$ تكافئ $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2-\frac{7+24i}{4}=0$ تكافئ $\left(z+\frac{i}{2}\right)^2=\left(\frac{4+3i}{2}\right)^2$

$\left(z+\frac{i}{2}\right)^2=\left(\frac{4+3i}{2}\right)^2$ تكافئ $\left(z+\frac{i}{2}\right)=\left(\frac{4+3i}{2}\right)$ أو $\left(z+\frac{i}{2}\right)=-\left(\frac{4+3i}{2}\right)$

ومنه حلّي المعادلة هما: $z_1=\frac{-i+3i+4}{2}=2+i$; $z_2=\frac{-i-3i-4}{2}=-2-2i$

2)تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ)

الدائرة (Γ) مركزها ω منتصف القطعة $[AB]$ ومنه: $z_\omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{(2+i)+(-2-2i)}{2}=-\frac{1}{2}i$

3) كتابة z_C على الشكل الجبري

لدينا: $z_C=\frac{4-i}{1+i}=\frac{(4-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3-5i}{2}$ أي $z_C=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

اثبات ان النقطة C تنتمي للدائرة (Γ)

C تنتمي للدائرة (Γ) معناه $\omega C=2AB$

لدينا: $\omega C=|z_c-z_\omega|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}$ و $AB=|z_B-z_A|=|4-3i|=5$ ومنه: $\omega C=2AB$

4-أ)البرهان ان عبارة التشابة S هي: $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

لدينا: $S(z_0)=z_0$ معناه $z_0=ke^{i\theta}z_0+b....(1)$ و $S(z)$ معناه $z'=ke^{i\theta}z+b....(2)$

بطرح (2) من (1) نجد: $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب)تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S

S معرف بـ: $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z+\frac{1}{2}i)$ ومنه S تشابه مباشر لأن $k=2$ مركزه النقطة $\omega(-\frac{1}{2}i)$ ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

شعبة :تقني رياضي

التمرين37: دورة 2018 م1

I)حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

المعادلة $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$ تكافئ $(z^2-\sqrt{2})^2=(i\sqrt{2})^2$

وتكافئ $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ أو $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ومنه الحلين هما: $\{\sqrt{2}+i\sqrt{2}i;\sqrt{2}-i\sqrt{2}\}$.

II-1) كتابة على الشكل الأسي العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$.

لدينا: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ومنه $|z_A|=|\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2$.

ومنه: $z_A=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2e^{\frac{\pi}{4}i}$

ولدينا: $z_B=\overline{z_A}=2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ ومنه $\frac{1}{z_B}=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

تبيّان أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

لدينا: $\frac{2}{z_B}=e^{\frac{\pi}{4}i}$ ومنه $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}=e^{2018\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{1009\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ لأن $\frac{1009\pi}{2}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) تبيّان أن لاحقة النقطة C هي $z_C=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$.

C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3)

ومنه: $z_C=-3z_B+(1+3)z_\omega=-3(\sqrt{2}-i\sqrt{2})+2\sqrt{2}=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$

3) حساب z_D لاحقة D

لدينا: D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $(-\frac{\pi}{2})$.

ومنه: $z_D=e^{-\frac{\pi}{2}i}z_B=-i(\sqrt{2}-i\sqrt{2})=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

4 -أ) تبيّان أن: $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ ثم استنتاج طبيعة المثلث ACD.

لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{(-1+i)^2}{2}=-i$

العبارة $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ تكافئ $\left|\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right|=|-i|=1...(1)$ و $\text{Arg}\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi...(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين.

ب) إيجاد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي ACED مربعا.

الرباعي ACED مربعا معناه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$ معناه $z_E-z_D=z_C-z_A$ أي $z_E=z_D+z_C-z_A$ ومنه: $z_E=-3\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

التمرين38: دورة 2018 م2

I-أ)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(E).....4z^2-2z+1=0$

لحل المعادلة (E) نستعمل المميز المختصر $\Delta'=b'^2-ac=(1)^2-(4)(1)=-3=(i\sqrt{3})^2$

وعليه المعادلة (E) تقبل حلين مترافقين هما:

$z_1=\frac{-b'-\delta}{a}=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$ حيث δ جذر تربيعي لـ Δ' و $z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$

ب) كتابة العددان $\frac{1}{z_1}$ ، $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي

تذكير: إذا كان $z=re^{\theta i}$ فإن $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-\theta i}$ حيث r طويلة z و θ عمدة له.

لدينا: $z_1=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $\frac{1}{z_1}=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $\frac{1}{z_2}=\left(\frac{1}{z_1}\right)=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

II- 1-أ)حساب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

*لدينا: $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}$.

ومنه: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}=\frac{(3+i\sqrt{3})^2}{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

*** تحديد طبيعة المثلث ABC .**

لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ معناه $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

أي $AC=AB$ و $\frac{\pi}{3}$ قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

ومنه المثلث ABC متساوي الأضلاع

ب-استنتاج أن B صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=1e^{\frac{\pi}{3}i}$ وتكافئ $z_B-z_A=(z_C-z_A)e^{\frac{\pi}{3}i}$....(*)

من العبارة (*)نستنتج أن B صورة C بدوران مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

2- ايجاد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$.

لدينا النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ معناه $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$

ومنه: $z_D=z_B-z_C+z_A=1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+4=4+2i\sqrt{3}$

استنتاج بدقة طبيعة الرباعي ACBD.

لدينا: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$.....(1) و (2).....المثلث ABC متساوي الأضلاع

من (1) و (2) نستنتج ان الرباعي ACBD معين.

3-تحديد طبيعة المجموعة (γ).

لدينا: $|iz+\sqrt{3}-i|=|z-1+i\sqrt{3}|$ تكافئ $|i(z-i\sqrt{3}-1|=|z-1+i\sqrt{3}|$

وتكافئ $|i||z-(i\sqrt{3}+1)|=|z-(1-i\sqrt{3})|$

وتكافئ $|z_M-z_B|=|z_M-z_C|$

$|z_M-z_B|=|z_M-z_C|$ تكافئ هندسيا $MB=MC$

وعليه مجموعة النقط (γ) هي حامل محور القطعة المستقيمة $[BC]$

4-تبيان أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ).

النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي مركز ثقله ومنه $z_G=\frac{1}{3}(z_B+z_C+z_A)=2$

لاحقة النقطة G تحقق: $GB=GC$ لأن: $|z_G-z_B|=|z_G-z_C|=2$

وعليه النقطة G تنتمي إلى (γ).

التمرين39: دورة 2017 م1

1)كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC

*لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-1+i}{2(1+i)}=\frac{-(1-i)^2}{2|(1+i)|^2}=\frac{2i}{4}=\frac{1}{2}i$

*من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{2}i$ وتعني أن: $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه: $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ وعليه نستنتج أن المثلث ABC قائم في C

2) تعيين العبارة المركبة للتشابه S

لدينا: العبارة المركبة للتحويل S هي من الشكل: $z'-z_\omega=ke^{\theta i}(z-z_\omega)$

ولدينا:S مركزه C ويحوّل النقطة B إلى النقطة A

وعليه $z_A - z_C = ke^{\theta i}(z_B - z_C)$ ومنه : $ke^{\theta i} = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

ومنه العبارة المركبة هي: $z'+i = \frac{1}{2}i(z+i)$ أو $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} - i$

3-أ) تعيين لاحقة النقطة D والتحقق أن $z_E = 1-2i$

لدينا النقطة D نظيرة النقطة Bبالنسبة إلى النقطة C

ومنه $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$ أي $z_D - z_C = z_C - z_B$ إذن: $z_D = 2z_C - z_B = -2i - 2 - i = -2 - 3i$

لدينا:النقطة E صورة النقطة D بالتشابه S

ومنه $z_E = \frac{1}{2}iz_D - \frac{1}{2} - i = \frac{1}{2}i(-2-3i) - \frac{1}{2} - i = 1 - 2i$

ب)تحديد طبيعة الرباعي ADEB

لدينا القطران [AE] و [BD] متعامدان ومتناصفان لأن:

1) D نظيرة النقطة Bبالنسبة إلى النقطة C و A نظيرة النقطة Eبالنسبة إلى النقطة C

2) والمثلث ABC قائم في C ومنه الرباعي ADEB معين .

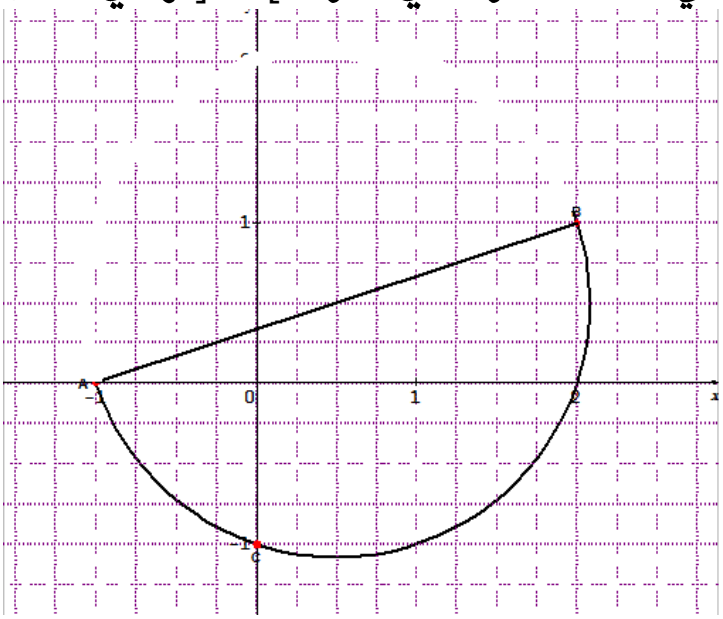
4) التحقق ان النقطة C تنتمي للمجموعة (Γ) وتحديد طبيعة المجموعة (Γ) وإنشائها

*(Γ) هي مجموعة النقط M(z) حيث: $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أي $\arg(\frac{z - z_A}{z - z_B}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ محققة من أجل $z = z_C$ لأن $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ الجواب1

*$(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ تعني $\arg(\frac{z - z_A}{z - z_B}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها]AB[والتي تشمل النقطة C



التمرين40: دورة 2017 م2

1- أ)كتابة العددين z_A و z_C على الشكل الأسي واستنتاج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D

* لدينا: $z_A=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $z_C=\frac{1}{2}(1-i)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

ولدينا: $z_B=\overline{z_A}$ وعليه $z_B=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و $z_D=\overline{z_C}$ وعليه $z_D=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n=(z_B)^n$

لدينا: $(z_A)^n=(z_B)^n$ تكافئ $(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^n=(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^n$ وتكافئ $e^{\frac{n\pi}{4}i}=e^{-\frac{n\pi}{4}i}$

وتكافئ $e^{\frac{n\pi}{2}i}=1$ (بضرب الطرفين في $e^{\frac{n\pi}{4}i}$) وعليه $\frac{n\pi}{2}=0$ أي $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

2 أ) تعيين نسبة ومركز التحاكي h

لدينا: $h(D)=A$ و $h(C)=B$

العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z'=kz+(1-k)z_\omega$ حيث k هي النسبة ω هو المركز

لدينا: $h(D)=A$ و منه $z_A=kz_D+(1-k)z_\omega$.....(1)

$h(C)=B$ ومنه $z_B=kz_C+(1-k)z_\omega$....(2)

بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $z_B-z_A=k(z_C-z_D)$....(3)

من العلاقة (3) نجد: $k=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_D}=\frac{-2i}{-i}=2$ ومن العلاقة (1) نجد: $z_\omega=\frac{z_A-kz_D}{1-k}=0$

ومنه مركز التحاكي h هو المبدأ O ونسبته هي 2.

ب) حساب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ واستنتاج طبيعة الرباعي ADCB

طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ هي العدد الحقيقي الموجب تماما $\left|\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right|=\left|\frac{-1+i}{-1+i}\right|=1$

من الجواب السابق نستنتج أن: $AD=CB$ ولدينا $(AB)//(DC)$ لأن $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$

وعليه الرباعي ADCB شبه منحرف متساوي الساقين.

3) تعيين لاحقة النقطة G

لدينا : G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\}$

ومنه : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C-z_D}{2+2-1-1}=\frac{2z_A+2\overline{z_A}-z_C-\overline{z_C}}{2}==\frac{2(z_A+\overline{z_A})-(z_C+\overline{z_C})}{2}=\frac{3}{2}$

4)تبيان أن A نقطة من (Γ) ثم تحديد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وإنشئها

لدينا: (Γ) هي مجموعة النقط M حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$

*لدينا:A نقطة من (Γ) معناه $\left\|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{5}$

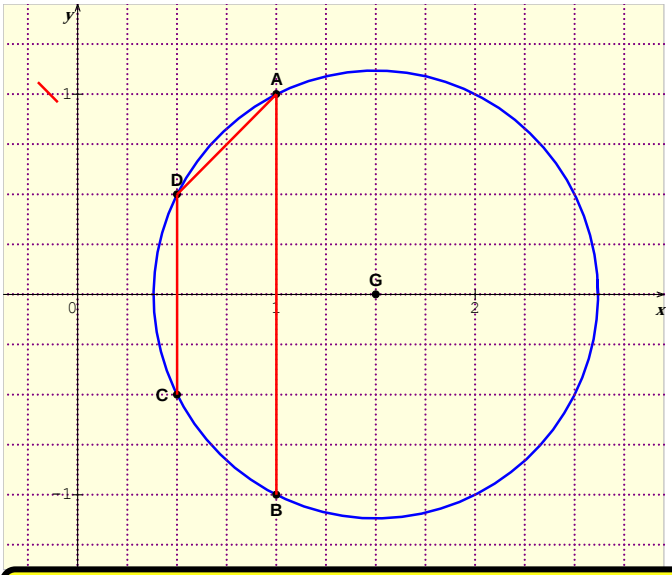
لدينا: $\left\|2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right\|=\left|2(z_B-z_A)-(z_C-z_A)-(z_D-z_A)\right|=\left|2z_B-z_C-z_D\right|=\sqrt{5}$

*لدينا $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=\sqrt{5}$ خاصية

ومنه : $MG=\frac{\sqrt{5}}{2}$ وعليه (Γ) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$

*الإنشاء

(Γ) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=AG$



التمرين 41 :دورة 2017الاستدراكية م1

I)حل في مجموعة الاعداد المركبة ℂ المعادلة ذات المجهول z : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

المعادلة تكافئ $(z-4)=0$ أو $z^2-2z+4=0$

وتكافئ $z=4$ أو $(z-1)^2=(\sqrt{3}i)^2$ أي $z=2$ أو $z=1-\sqrt{3}i$ أو $z=1+\sqrt{3}i$

II-1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ الشكل الأسي .

لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)^2}{\left|-3+i\sqrt{3}\right|^2}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})=1.e^{\frac{\pi}{3}}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}}$ وتعني $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

والتفسير الهندسي معناه $AB=AC$ و $\frac{\pi}{3}$ قيسا للزاويا الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

نستنتج مما سبق أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2- أ)تعيين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

العبارة المركبة للدوران r هي: $z' = e^{\frac{2\pi}{3}i}z + (1-e^{\frac{2\pi}{3}i})z_O = e^{\frac{2\pi}{3}i}z$

لدينا: $r(B) = D$ ومنه $z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i}z_B = e^{\frac{2\pi}{3}i}.2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\pi i} = -2$ (يمكن استعمال الطريقة الجبرية)

ب) تعيين طبيعة الرباعي ABDC

لدينا: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ لأن $z_B - z_A = z_D - z_C = 2i\sqrt{3}$ .....(1)

ولدينا من جهة أخرى المثلث ABC متقايس الأضلاع .....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي ABDC معين.

3- أ)تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

لدينا: $(z_B)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})$ و $(z_B)^n = (\overline{z_C})^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})$

ومنه: $z_n = (z_C)^n + (z_B)^n = 2^n(2\cos\frac{n\pi}{3}) = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

ب)التعبير عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n: $t_n = z_{6n}$.

ومنه: $t_n = z_{6n} = 2^{6n+1}\cos\frac{6n\pi}{3} = 2^{6n+1}\cos(2n\pi) = 2^{6n+1}$ (من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $\cos(2n\pi) = 1$)

لدينا: $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times .....\times t_n = 2^{6(0)+1} \times 2^{6(1)+1} \times .....\times 2^{6(n)+1} = 2^{1+7+13+.....(6n+1)}$

لدينا: $1+7+13+...+(6n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(1+6n+1) = (n+1)(3n+1)$ مجموع متتالية حسابية

وعليه: $P_n = 2^{(n+1)(3n+1)}$

التمرين 42: دورة 2017 الاستدراكية م2

I)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4) = 0$

المعادلة تكافئ $(z+1-\sqrt{3})$ أو $z^2+2z+4=0$

وتكافئ $z = \sqrt{3}-1$ أو $(z+1)^2 = (\sqrt{3}i)^2$ أي $z = \sqrt{3}-1$ أو $z = -1-\sqrt{3}i$ أو $z = -1+\sqrt{3}i$

ومنه الحلول هي: $\{-1+\sqrt{3}i; -1-\sqrt{3}i; \sqrt{3}-1\}$.

II- 1)تبيّان أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته.

*التبيان: لدينا: $z_B - z_A = -i\sqrt{3} - \sqrt{3} = i(-\sqrt{3} + i\sqrt{3}) = i(z_C - z_A)$

* الاستنتاج: $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ تكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$

وعليه $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=|i|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

أي $AC=AB$ و $\frac{\pi}{2}$ قيسا للزواية الموجهة $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

*حساب المساحة: مساحة المثلث ABC تعطى بالعلاقة : $S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{1}{2}AB^2$

حيث : $AB=|z_B-z_A|=\sqrt{6}$ وعليه $S_{ABC}=3(u.a)$

2-أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب L حيث $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}$

لدينا: $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}=\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(-1+i)(-1-i\sqrt{3})}{|-1+i\sqrt{3}|^2}=\frac{\sqrt{3}\left[(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})\right]}{4}$

ب-تبيّان أن: $L=\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ثم استنتاج القيمة المضبوطة لـ: $\tan\frac{\pi}{12}$.

التبيان: $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}=\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}.e^{\frac{3\pi}{4}}}{2e^{\frac{2\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

الإستنتاج: لدينا: $L=\frac{\sqrt{3}\left[(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})\right]}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

نعلم ان : $\tan(\arg(L))=\frac{Im(L)}{Re(L)}$ ومنه $\tan(\frac{\pi}{12})=\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(-1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3}=2-\sqrt{3}$

3)تبيّان أن S تشابه مباشر و تحديد عناصره المميزة.

التحويّل النقطي S معرف بالعلاقة المركبة : $z'=(z-z_B)L+z_B....(*)$

لدينا: (*) تكافئ $z'=Lz+(1-L)z_B$ هي العبارة المركبة للتشابه S

ومنه S هو تشابه مباشر لان $|L|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

والعناصر المميزة هي: النسبة $k=|L|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ و الزاوية $\theta=\arg(L)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$

والمركزهو النقطة ω حيث $z_\omega=\frac{(1-L)z_B}{(1-L)}=z_B$

الخلاصة : $S(B;\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\pi}{12})$

4)حساب مساحة المثلث $A'B'C'$.

لدينا: A' ، B' و C' صور النقط A ، B و Cعلى الترتيب بالتحويل SoS.

مساحة صورة المثلث A'B'C' صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر $SoS(B;k^4;2\theta)$

تعطى بالعلاقة : $S_{A'B'C'}=k^4S_{ABC}$ وعليه $S_{A'B'C'}=k^4S_{ABC}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4\times 3(u.a)=\frac{27}{4}(u.a)$

التمرين43: دورة 2016 م1

1)حل المعادلة $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $\Delta'=b'^2-ac=-9=(3i)^2$ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما:

$$z_1=\frac{3\sqrt{3}+3i}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i \quad ،z_1=\frac{3\sqrt{3}-2i}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i$$

2-أ)كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي

لدينا: $z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i=\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\frac{2}{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_B=\overline{z_A}=\frac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

ب) تبيان أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$

ومنه: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=(e^{\frac{\pi}{3}i})^{2016}+(e^{\frac{\pi}{3}i})^{1437}=e^{672\pi i}+e^{479\pi i}=e^{0\pi i}+e^{\pi i}=1-1=0$

ج)تعيين قيم العدد الطبيعي n

لدينا: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$عددا حقيقيا معناه $(e^{\frac{n\pi}{3}i})\in\mathbb{R}$ ومعناه $n\frac{\pi}{3}=k\pi$ ومنه $n=3k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

3-أ)تعيين طبيعة التحويل f وعناصره المميزة

العبارة المركبة للتحويل f هي: $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$ أي $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}z$.....(*)

العبارة (*)من الشكل $z'=az+b$ حيث: $a=e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $b=0$

نستنتج ان f دوران لأن : $|a|=1$ مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب)حساب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f

النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f ومنه: $z_C=e^{\frac{\pi}{3}i}z_A=\frac{2}{3}e^{\frac{\pi}{3}i}.e^{\frac{\pi}{6}i}=\frac{2}{3}e^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{2}{3}i$

ج) تعيين z_D لاحقة النقطة D

Oمركز ثقل الرباعي ABCD معناه $z_A+z_B+z_C+z_D=0$

ومنه: $z_D=-(z_A+z_B+z_C)$ أي $z_D=-2(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i)$

التمرين44: دورة 2016 م2

I-1)حل المعادلة $(z^2-2\sqrt{2}z+4)(2z-\sqrt{2})=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $(z^2-2\sqrt{2}z+4)(2z-\sqrt{2})=0$ معناه $(2z-\sqrt{2})=0$ أو $(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$

ومنه: $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0....(*)$ نحل المعادلة باستعمال المميز المختصر Δ'

$\Delta'=b'^2-ac=(\sqrt{2})^2-1.(4)=-2=(i\sqrt{2})^2$ ومنه المعادلة (*) تقبل حلين مترافقين هما:

$z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ، $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

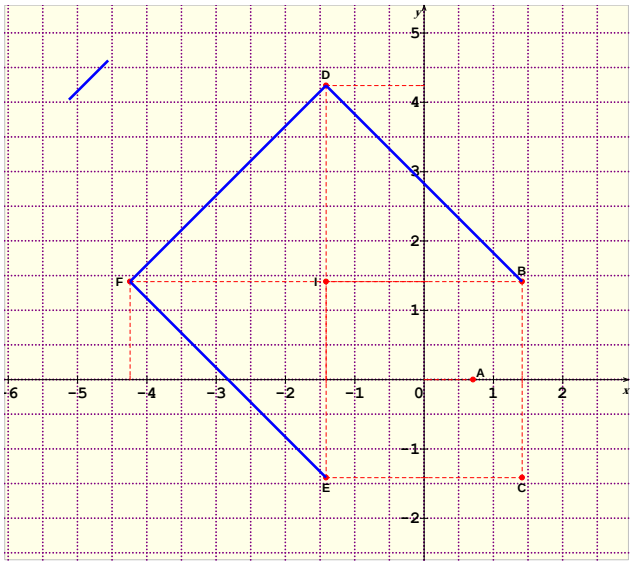
ومنه الحلول هي : $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ أو $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

2)كتابة الحلول على الشكل الأسي

$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+0i)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{0i}$ و $z_1=2(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و $z_2=\bar{z_1}=2e^{\frac{\pi}{4}i}$

II-1)تعليم النقط A ، B و C

$z_a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$



2)حساب اللاحقتين c و d و e للنقطتين D و E

لدينا:D صورة C بالتشابه المباشر

S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π

ومنه: $d=3e^{\pi i}z_C+(1-3e^{\pi i})z_A=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$

صورة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ومنه: $e=e^{-\frac{\pi}{2}i}z_C+(1-e^{-\frac{\pi}{2}i})z_O=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

III-1)كتابة العدد z على الشكل المثلثي

لدينا: $z=\frac{d-b}{e-b}=\frac{-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i=1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

2) تعيين طبيعة الرباعي BDFE

لدينا: I منتصف القطعة $[DE]$ أي $z_I=\frac{z_D+z_E}{2}=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ولدينا:F نظيرة B بالنسبة للنقطة I أي: $\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{BI}$ ومنه: $z_F=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

الرباعي BDFE مربعا لأن القطران $[DE]$ و $[BF]$ لهما نفس المنتصف I

والزاوية الموجهة $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BE})$ قائمة لأن $\arg\frac{d-b}{e-b}=\frac{3\pi}{2}$.

التمرين45: دورة 2015 م1

1) -أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي

لدينا: $z_A = 1-i$ ومنه: $z_A = 1-i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

$z_A = 3+3i$ ومنه: $z_A = 3+3i = 3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

ب)تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا: $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = e^{-\frac{n\pi}{4}i}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا معناه $\arg\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = k\pi$ حيث k عدد صحيح.

ومنه $-n\frac{\pi}{4} = k\pi$ حيث k' عدد طبيعي $n = 4k'$.

ج)حساب طويلة العدد z وعمدة له وكتابة $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

*لدينا: $\frac{z}{z_A} = 4e^{\frac{\pi}{12}i}$ ومنه $z = 4z_A e^{\frac{\pi}{12}i}$ وعليه $|z| = \left|4z_A e^{\frac{\pi}{12}i}\right| = |4z_A| = 4|z_A| = 4\sqrt{2}$

الخلاصة: $\arg(z) = \arg(z_A) + \frac{\pi}{12} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $z = \left[4\sqrt{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$

*من الجواب السابق لدينا: $z = \left[4\sqrt{2}; -\frac{\pi}{6}\right] = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = 4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-i)$

ومنه : $\frac{z}{z_A} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-i)}{1-i} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2} = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

د)استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

لدينا: $\frac{z}{z_A} = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2}).....(1)$ و $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right) = 4e^{\frac{\pi}{12}i} = 4(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$.....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $\begin{cases} 4\cos(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{6}+\sqrt{2} \\ 4\sin(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{6}-\sqrt{2} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

2)-أ)حساب اللاحقة z_C .

لدينا: C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي: $z' = e^{\frac{\pi}{2}i}z + (1-e^{\frac{\pi}{2}i})z_A$

أي $z_C = e^{\frac{\pi}{2}i}z_B + (1-e^{\frac{\pi}{2}i})z_A = i(3+3i) + (1-i)(1-i) = -3+i$

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

بماأن : C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

فإن: $AB = AC$ و $\frac{\pi}{2}$ هو قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

وعليه المثلث ABC قائم في A ومتقايس الساقين.

ب)حساب اللاحقة z_D **و تبيان أن** ABDC **مربعا.**

لدينا: D مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$.

ومنه : $z_D = \frac{-z_A + z_B + z_C}{-1+1+1} = -(1-i)+(3+3i)+(-3+i)$ أي: $z_D = -1+5i$

لأن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ولدينا $z_{\overrightarrow{AB}} = 2+4i$ و $z_{\overrightarrow{CD}} = 2+4i$ المثلث ABC قائم في A ومتقايس الساقين

نستنتج مما سبق أن :الرباعي ABDC مربعا.

التمرين46: دورة 2015 م2

1) حل المعادلة (1) في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $z^2 - (4\sin\theta)z + 4 = 0 \ldots..(1)$ حيث θ وسيط حقيقي

$\Delta' = b'^2 - ac = (2\sin\theta)^2 - 4 = 4\sin^2\theta - 4$ أي $\Delta' = 4\sin^2\theta - 4 = -4(1-\sin^2\theta) = (2i\cos\theta)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما: $z_1 = 2(\sin\theta + i\cos\theta)$ ، $z_2 = 2(\sin\theta - i\cos\theta)$

2) كتابة z_1 **و** z_2 **على الشكل الأسي.**

من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ يكون $z_1 = 2(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$ و $z_2 = 2(\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3})$

ومنه: $z_1 = 2\left[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})\right] = 2\left[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right] = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ و $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

3-أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ **على الشكل الجبري.**

لدينا: $z_A = \sqrt{3}+i$ ، $z_B = \sqrt{3}-i$ و $z_C = 3\sqrt{3}+i$ ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}}{-i} = \sqrt{3}i$

كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ **على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث** ABC

لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ ومن الجواب السابق لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

ومنه: $\frac{\pi}{2}$ هو قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ وعليه المثلث ABC قائم في A

ب) استنتاج أن النقطة C صورة النقطة B بالتشابه المباشر S.

من العبارة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ نجد: $z_C - z_A = (z_B - z_A)\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

نستنتج أن: C صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ)تعيين لاحقة النقطة D وتحديد طبيعة الرباعي ABDC

*لدينا النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

العبارة المركبة للإنسحاب t هي: $z' = z + z_{\overrightarrow{AC}}$ حيث: $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 2\sqrt{3}$

ومنه لاحقة النقطة D هي: $z_D = z_B + 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + i$

* لدينا: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$....(1) لأن D صورة B بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$

ولدينا: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ قيسا للزاوية الموجهة $\frac{\pi}{2}$...(2)

من (1) و (2) نستنتج أن: الرباعي ABDC مستطيل.

4)-أ)تعيين مجموعة النقط (Γ_1).

لدينا: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف معناه $\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه: $\frac{\pi}{2} + k\pi$ قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC})$ وعليه مجموعة النقط (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها [BC] بإستثناء النقطة B

ب) تعيين مجموعة النقط (Γ_2).

لدينا: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقي معناه $\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_B}\right) = k\pi$ ومنه: $k\pi$ قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC})$

وعليه مجموعة النقط (Γ_1) هي المستقيم (BC) بإستثناء النقطة B.

التمرين47: دورة 2014 م1

1)حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

المعادلة $(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ تكافئ $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ أو $(z-i) = 0$

وتكافئ $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$....(*) أو $z = i$

لدينا: (*)تكافئ $(z-\sqrt{3})^2=i^2$ أي $z=\sqrt{3}-i$ أو $z=\sqrt{3}+i$

الخلاصة أن:حلول المعادلة $(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ هي: $z=i$ أو $z=\sqrt{3}-i$ أو $z=\sqrt{3}+i$

2- أ)أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

$z_1=\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ ، $z_2=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ لأن: z_2 مرافق z_1 وعليه: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{-\frac{\pi}{6}i}}=e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})i}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب)هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟وتبرير الاجابة

نعلم أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا معناه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ وعليه: $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $2n=3(1+2k)$

ومنه:لاتوجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا لأن

الطرف الأول زوجي والطرف الثاني فردي

3-أ)تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S .

لدينا:التشابه S مركزه A ويحوّل B إلى C ومنه العبارة المركبة له هي:

$z_C-z_A=\alpha(z_B-z_A)$ حيث $\alpha=re^{\theta i}$ ومنه: $\alpha=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ أي $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\theta=-\frac{\pi}{2}$

العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي: $z'=\alpha z+(1-\alpha)z_A$

ومنه: $z'=-\frac{\sqrt{3}}{2}iz+(1+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z_A=-\frac{\sqrt{3}}{2}iz+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$

تعيين نسبة وزاوية التشابه S

نعلم أن:النسبة هي: $|\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و الزاوية هي $\theta=\arg(\alpha)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ب)استنتاج طبيعة المثلث ABC.

لدينا مما سبق أن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومعناه $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$

أي $-\frac{\pi}{2}$ قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ وعليه الثلثABC قائم في A.

4-أ)تعيّين العناصر المميزة لـ (E) .

لدينا مجموعة النقط M(z)من المستوي والتي تحقق : $|z-z_1|^2+|z-z_3|^2=5$.

$|z-z_1|^2+|z-z_3|^2=5$ معناه $MA^2+MC^2=5$ ومعناه $2IM^2+IA^2+IC^2=5$

حيث I منتصف القطعة $[AB]$ أي $z_I=\frac{1}{2}(z_A+z_C)=\frac{\sqrt{3}}{2}+i$

ولدينا: $IA^2=IC^2=|z_I-z_C|^2=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$ وعليه: $2IM^2+IA^2+IC^2=5$ تكافئ $IM^2=\frac{7}{2}$

ومنه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

ب) تعيّين مجموعة النقط (E') .

لدينا: (E') هي مجموعة النقط M(z) من المستوي والتي تحقق : $|z-z_1|=|z-z_3|$

$|z-z_1|=|z-z_3|$ تكافئ $MA=MC$ ومنه مجموعة النقط (E') هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$.

ملاحظة: يمكن استعمال الطريقة التحليلية لتعيين مجموعة النقط في الحالتين أ) و ب)

التمرين48: دورة 2014 م2

1-أ)تعيّين ،ثم أنشاء (γ) مجموعة النقط M(z) من المستوي حيث: $z=z_0+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

لدينا: $z=z_0+2e^{i\theta}$ يمسح $\mathbb{R}$ تكافئ $z-z_0=2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z-z_0|=|2e^{i\theta}|=2$

ومنه: $|z_M-z_A|=2$ أي $AM=2$ وعليه مجموعة النقط (γ) هي دائرة مركزها A ونصف قطرها2.

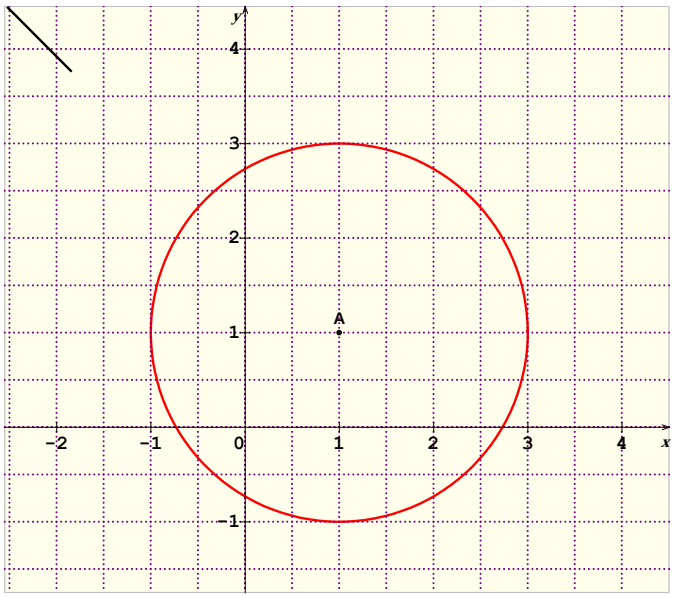
ب) تعيّين ،ثم أنشاء (γ') مجموعة النقط M(z) من المستوي حيث: $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$

لدينا: $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$ تكافئ $z-z_0=ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ وتكافئ $z_M-z_A=ke^{i\frac{3\pi}{4}}$

أي $\arg(z_M-z_A)=\frac{3\pi}{4}$ لأن k يمسح $\mathbb{R}^+$ ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{3\pi}{4}$

ومنه مجموعة النقط (γ') هي نصف المستقيم مبدأه A وشعاع توجيه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{u};\vec{v})=\frac{3\pi}{4}$

إنشاء المجموعتين (γ') و (γ).



ج)تعيّين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ').

لتعيين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') نحل الجملة التالية:

$$\begin{cases} z=z_0+2e^{i\theta}.....(1) \\ z=z_0+ke^{\frac{3\pi}{4}i}....(2) \end{cases}$$

$z=z_0+2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ تكافئ $\begin{cases} z=z_0+2e^{i\theta}.....(1) \\ z=z_0+ke^{\frac{3\pi}{4}i}....(2) \end{cases}$

2-أ)تعيّين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$.

لدينا: $\frac{z_1-z_0}{z_0}=\frac{z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}-z_0}{z_0}=\frac{2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{z_0}=\frac{2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}i$

استنتاج طبيعة المثلث OAB.

لدينا: $\frac{z_1-z_0}{z_0}=\sqrt{2}i$ تكافئ $\frac{z_0-z_1}{z_0}=-\sqrt{2}i$ وتكافئ $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_O}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه نستنتج ان المثلث OAB قائم في A.

ب) تعيّين z_2 لاحقة النقطة C

لدينا : z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ومنه: $z_C=-iz_B+(1+i)z_A=-i\left[(1+i)+(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\right]+(1+i)^2=(1+\sqrt{2})(1-i)$

جـ)تعيّين العددين α و β

لدينا: النقطة O مرجحا للجملة: $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$.

ومنه: $\alpha z_A+\beta z_B=0$ ومعناه $\alpha(1+i)+\beta(1+\sqrt{2})(1-i)=0$ ومعناه $\begin{cases}\alpha+(1+\sqrt{2})\beta=0\\ \alpha+\beta=\sqrt{2}\end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد: $\alpha=1+\sqrt{2}$ و $\beta=-1$.

د)تعيّين ثم أنشئ (E).

لدينا: $((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})=0$ تكافئ $\sqrt{2}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AC}=0$

ومنه : مجموعة النقط (E) هي المستقيم الذي يشمل المبدأ O وعمودي على المستقيم (AC)

التمرين49: دورة 2013 م2

1-حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$

لدينا: $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$ تكافئ $(z+5-i\sqrt{3})=0$ أو $(z^2+2z+4)=0$

وتكافئ $(z^2+2z+4)=0...(e)$ أو $z=-5+i\sqrt{3}$

لدينا: (e) تكافئ $(z+1)^2=(i\sqrt{3})^2$ أي $z=-1+\sqrt{3}i$ أو $z=-1-\sqrt{3}i$

الخلاصة أن: حلول المعادلة هي: $z=-5+i\sqrt{3}$ أو $z=-1+\sqrt{3}i$ أو $z=-1-\sqrt{3}i$

2- ايجاد الكتابة المركبة للتشابه S، ثم تعيّين العناصر المميزة له.

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z'=\alpha z+\beta$ حيث α و β عددان مركبان.

لدينا: S التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى C ويحوّل O إلى B ومنه: $\begin{cases} z_C=\alpha z_A+\beta \\ z_B=\alpha z_O+\beta \end{cases}$

الجملة السابقة تكافئ $z_C-z_B=\alpha(z_A-z_O)$ (بطرح المعادلتين طرف لطرف)

وعليه: $\alpha=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_O}=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}=1-i\sqrt{3}$ ولدينا: $\beta=z_B-\alpha z_O=z_B=-1+i\sqrt{3}$

ومنه : العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z'=(1-i\sqrt{3})z-1+i\sqrt{3}$

العناصر المميزة للتشابه هي: النسبة $k=|\alpha|=2$ والزاوية $\theta=\arg(\alpha)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

والمركز $\omega(z_\omega)$ حيث : $z_\omega=\dfrac{\beta}{1-\alpha}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$ وبعد الضرب في مرافق المقام نجد: $z_\omega=1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3-أ) تعيّين z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$

لدينا: z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$ معناه $z_D=\dfrac{2z_A+z_B-z_C}{2}=-3-i\sqrt{3}$

ب) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي و استنتاج طبيعة المثلث ABD

لدينا $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{2i\sqrt{3}}{-2}=-i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{2}i}$

لدينا: $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ومعناه $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه المثلث ABD قائم في A.

جـ) تعيّين المجموعة (Γ).

لدينا: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|(2+1-1)\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}\right\|$

وتكافئ $\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|-\overrightarrow{AB}\right\|$ أي $MD=\dfrac{AB}{2}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي دائرة مركزها D ونصف قطرها $\sqrt{3}$ لأن: $AB=2\sqrt{3}$

التمرين50: دورة 2012 م1

1-تعيّين العددين المركبين z_1 و z_2

لدينا الجملة $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\9z_1-3z_2=24+24i\end{cases}$ (بضرب طرفي المعادلة (2) في 3)

وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد: $11z_1=33+22i$ ومنه: $z_1=3+2i$

وبتعويض قيمة $z_1=3+2i$ ومن المعادلة $3z_1-z_2=8+8i$ نجد: $z_2=3z_1-8-8i=1-2i$

2- أ) اثبات أن: $z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$.

لدينا: $z_A=3+2i$ و $z_B=-3$ و $z_\Omega=1-2i$.

ومنه: $z_B-z_\Omega=-4+2i$ و $i(z_A-z_\Omega)=i(2+4i)=-4+2i$ وعليه: $z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$.

ب) استنتاج طبيعة المثلث ΩAB.

$z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$ تكافئ $\frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}=i$ وتكافئ $\begin{cases}\arg\left(\frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\\left|\frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}\right|=|i|=1\end{cases}$

وعليه المثلث ΩAB قائم في Ω ومتقايس الساقين.

3- أ) تعيّين الكتابة المركبة للتحاكي h.

لدينا: h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2

ومنه العبارة المركبة هي: $z'=kz+(1-k)z_A$ ومنه $z'=2z-3-2i$

ب) تعيّين z_C لاحقة النقطة C .

لدينا: C صورة النقطة Ω بالتحاكي h ومنه: $z_C=2z_\Omega-3-2i=-1-6i$

ج) تعيّين z_D لاحقة النقطة D

لدينا: النقطة D مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ ومنه: $z_D=z_A-z_B+z_C=5-4i$

د) تبيّان أن ABCD مربع.

لدينا: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ لأن $z_B-z_A=z_C-z_D=-6-2i$ .....(1)

ولدينا: القطران [AC] و[BD] متعامدان ومتقايسان ولهما نفس المتصف Ω.....(2)

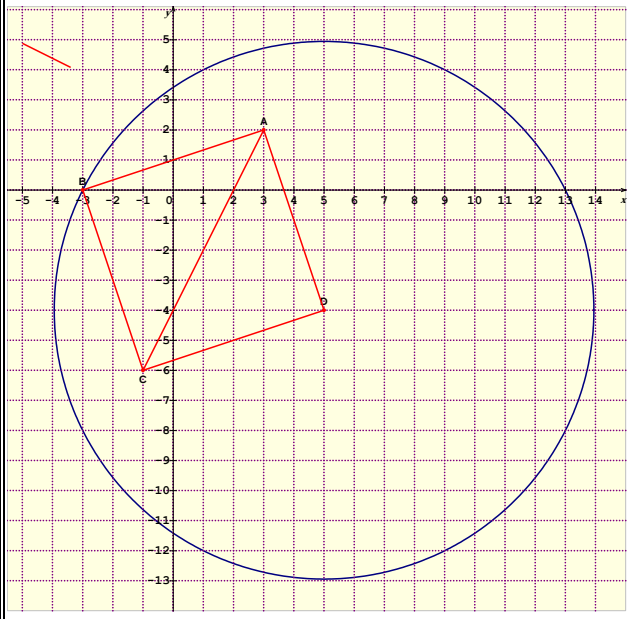
من (1) و(2) نستنتج أن: الرباعي ABCD مربع.

4- أ) تبيّان أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E).

لدينا: (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

ومنه: النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) معناه $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=4\sqrt{5}$

لدينا: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\left|z_D-z_B\right|=\left|8-4i\right|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.



تعيين طبيعة (E) وعناصرها المميزة

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=4\sqrt{5}$

لأن: D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

ومنه: $DM=4\sqrt{5}$ وعليه مجموعة النقط (E)

هي دائرة مركزها D ونصف قطرها $DB=4\sqrt{5}$.

ب) انشاء المجموعة (E).

التمرين51: دورة 2011 م2

1-أ) كتابة L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

الشكل الجبري:

$$L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}=\frac{\sqrt{2}(-4+i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{\sqrt{2}(-17)+i(17)}{(5^2+3^2)}=\frac{17(-\sqrt{2}+i)}{34}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

الشكل الأسي.

لدينا: $L=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=1(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=1.e^{\frac{3\pi}{4}i}$

ب)تبيّان أن: $L^{12}+1=0$، ثم حساب $(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}+(5+3i)^{12}$

تذكير: $e^{k\pi i}=-1$ إذا كان k عدد طبيعي فردي : $e^{k\pi i}=1$ إذا كان k عدد طبيعي زوجي

لدينا: $L^{12}+1=\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{12}+1=e^{\frac{3.12\pi}{4}i}+1=e^{9\pi i}+1=-1+1=0$.

لدينا: $(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}+(5+3i)^{12}=(5+3i)^{12}\left[(\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i})^{12}+1\right]=(5+3i)^{12}\left[(L)^{12}+1\right]=0$

ج) اثبات أن: $L^{4n}+L^{4p}=0$ حيث n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي

لدينا: $L^{4n}+L^{4p}=e^{n\pi i}+e^{p\pi i}=-1+1=0$ لأن n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي

2-أ) تعيين اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A

لدينا: A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

ومنه: $z_{A'}=\alpha z_A+(1-\alpha)z_B$ حيث: $\alpha=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-1+i$

أي: $z_{A'}=(-1+i)(5+3i)+(2-i)(5-3i)=-1-9i$

ب) تعيّين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA'.

z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' معناه

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_{A'}}{3}=\frac{5+3i+5-3i-1-9i}{3}=3-3i$$

شعبة :الرياضيات

التمرين52: دورة 2018 م1

I)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$

المعادلة $(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$ تكافئ $z^2-2z+2=0$ أو $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$

$z^2-2z+2=0$ معناه $z^2-2z+1=-1$ ومعناه $(z-1)^2=i^2$ أي $z=1-i$ أو $z=1+i$

$z^2-2(\sin\theta)z+1=0$ معناه $\Delta'=b'^2-ac=(\sin s\theta)^2-1=(i\cos\theta)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلّين مترافقين هما: $z=\sin\theta-i\cos\theta$ أو $z'=\bar{z}=\sin\theta+i\cos\theta$

وعليه حلول المعادلة هي: $1-i$ ،$1+i$ ، $\sin\theta-i\cos\theta$ ، $\sin\theta+i\cos\theta$

II-1) كتابة الأعداد z_A، z_B ، z_C و $z_D=\overline{z_C}$ على الشكل الأسي .

لدينا: $z_A=-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}=\sqrt{2}e^{-\pi i}.e^{\frac{5\pi}{4}i}=\sqrt{2}e^{(\frac{5\pi}{4}-\pi)i}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$$z_B=1-i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

تذكير: $z_C=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=1e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i}$ و $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ و $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$

2)تبيّان أن النقط C، D و E تنتمي الى دائرة واحدة و تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا: $z_E=\frac{z_A}{z_B}$ ومنه $z_E=1e^{-\frac{\pi}{2}i}$ و $z_D=\overline{z_C}$ و $z_C=1e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i}$

لدينا: $|z_C|=|z_D|=|z_E|=1$ ومعناه $OE=OD=OC=1$

وعليه النقط C، D و E تنتمي الى دائرة واحدة مركزها مبدأ المعلم Oونصف قطرها1.

3) تعيين قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S.

لدينا: S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$و ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$

وعليه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي: $z_B=(2\sqrt{2}-2)e^{\frac{\pi}{4}i}z_C+(1-(2\sqrt{2}-2)e^{\frac{\pi}{4}i})z_A$

بعد التبسيط نجد: $z_C=e^{\frac{5\pi}{4}i}$ أي $e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i}=e^{\frac{5\pi}{4}i}$ ومعناه $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ إذن $\theta=\frac{-3\pi}{4}$

4)تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

لدينا: $(z_D)^n=(\overline{z_C})^n=e^{(\theta-\frac{\pi}{2})ni}=e^{(\frac{3\pi}{4})ni}$ لان: $\theta=\frac{-3\pi}{4}$

ومنه $(z_D)^n$ تخيليا صرفا معناه $\frac{3n\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ وتكافئ $n\equiv 2[4]$ أي $n\equiv 4k+2$ حيث $k\in\mathbb{N}$

التمرين53: دورة 2018 م2

1)عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حليّن غير حقيقيين.

لدينا: $z^2+(m+1)z+(2m-1)=0....(E)$

المعادلة (E) حليّن غير حقيقيين معناه المميز $\Delta<0$

$\Delta<0$ معناه $(m+1)^2-4(2m-1)<0$ ومعناه $m^2-6m+5<0$ ومعناه $m\in]1;5[$

2) حل المعادلة (E)

من أجل $m=3$ المعادلة (E) هي: $z^2+4z+5=0$

لدينا: $z^2+4z+5=0$ تكافئ $z^2+4z+4=-1$ وتكافئ $(z+2)^2=i^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما: $z=-2-i$ أو $z=-2+i$

3)تبيان أن قيمة α التي من أجلها يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2+\sqrt{3})$

لدينا: النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها: $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ و $z_C=\alpha$

المثلث ABC متقايس الأضلاع معناه $AB=AC=BC$

لدينا: $AB=|z_B-z_A|=|2i|=2$ و $AC=|z_C-z_A|=|\alpha+2-i|=\sqrt{(\alpha+2)^2+1}$

$AB=AC$ تكافئ $\sqrt{(\alpha+2)^2+1}=2$ وتكافئ $(\alpha+2)^2+1=4$ تربيع الكرفين

$(\alpha+2)^2+1=4$ تكافئ $(\alpha+2)^2=3$ تكافئ $\alpha=-2+\sqrt{3}$ أو $\alpha=-2-\sqrt{3}$ مرفوض لأن $\alpha>-2$

4) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي

لدينا: $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ و $z_C=-2+\sqrt{3}$ و $z_E=\sqrt{3}$

ومنه: $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=\frac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i}=\frac{-2}{2i}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ لأن: $|i|=1$ و $Arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

استنتاج أن:

أ- المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

من الجواب السابق لدينا: $Arg\left(\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CE})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

ب-النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) و تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا: $|z_A-z_C|=|z_B-z_C|=|z_E-z_C|=1$ أي $CA=CB=CE=1$

ومنه النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) مركزها C ونصف قطرها 1

3-أ) حساب العدد المركب a ثم تعين زاوية الدوران r.

لدينا r الدوران الذي يحوّل B و C و يحوّل C إلى A عبارته المركبة هي:

لدينا: $z'=az+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ولدينا: r الدوران الذي يحوّل B و C و يحوّل C إلى A

أي: $z_C=az_B+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$...(1) و $z_A=az_C+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$...(2)

بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $z_C-z_A=a(z_B-z_C)$

وعليه: $a=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_C}=\frac{-2+\sqrt{3}+2-i}{-2-i+2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}=\frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

زواية الدوران r هي : $\mathrm{Arg}(a)=\mathrm{Arg}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

ب)التحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

النقطة G مركز ثقل المثلث ABC معناه $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

تطبيق عددي: $z_G=\frac{-2+i-2-i-2+i\sqrt{3}}{3}=-1+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

النقطة G هي مركز الدوران معناه $r(G)=G$ أي G نقطة صامدة بالدوران r

$r(G)=G$ معناه $z'_G=az_G+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)=-1+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

التمرين54: دورة 2017 م1

I)حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$

لدينا: $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$ تكافئ $(z-2+2i)$ أو $(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$

تكافئ $(z=2-2i)$ أو $(z-\sqrt{2})^2=(\sqrt{6}i)^2$ تكافئ $z=2-2i$ أو $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ أو $z=\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

ومنه: الحلول هي : $2-2i$ ، $\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ و $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$.

II)1-أ) كتابة كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي

لدينا: $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ ومنه $z_A=2\sqrt{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $z_B=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$ لأن $z_B=\overline{z_A}$

ولدينا: $z_C=2(1-i)$ ومنه $z_C=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

استنتج ان A،B و C تنتمي لدائرة (Ω) و تعيين مركزها ونصف قطرها.

من الجواب السابق لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ ومعناه $OA=OB=OC=2\sqrt{2}$

ومنه النقط A،B و C تنتمي لدائرة (Ω) مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r=2\sqrt{2}$.

ب)تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرّفا.

العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرّفا معناه $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

ولدينا $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{\frac{7\pi n}{12}}$ ومنه $\frac{7\pi n}{12} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ وتكافئ $7n \equiv 6[12]$ وتكافئ $7n \equiv 42[12]$

ومنه $n \equiv 6[12]$ وعليه $n = 12k + 6$ حيث k عدد طبيعي

ملاحظة:يمكن استعمال طريقة غوص للحصول على قيم العدد الطبيعي n.

ج) التحقق أن C القطة تنتمي إلى (Γ)

لدينا: (Γ)مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+$

ومنه: C القطة تنتمي إلى (Γ) معناه $z_C = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ محققة من أجل $k = 0$

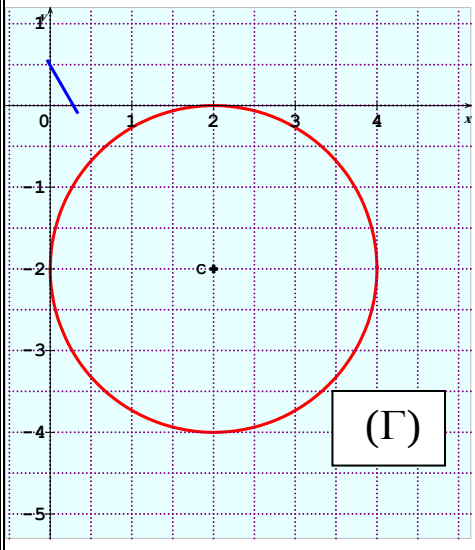
تعيّن وإنشاء (Γ)

لدينا $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ تكافئ $\arg(z - z_C) = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) + \pi$

وتكافئ $(\vec{u}; \overrightarrow{CM}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه مجموعة النقط (Γ)

هي نصف المستقيم (Δ) الذي حدّه النقطة C ويصنع زاوية

قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل.



3) تعيّين طبيعة التحويل hor وعناصره المميزة

r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

و h التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2

ومنه: $h(O;-2)or(O;\frac{2\pi}{3}) = S(O;|-2|;\frac{2\pi}{3} - \pi)$ حيث S تشابه مباشر

العناصر المميزة للتشابه المباشر هي:مركزه المبدأ O ونسبة $k = |-2| = 2$ وزاوية $\frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$

أستنتاج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor.

صورة الدائرة (Ω) التي مركزها O ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$ هي الدائرة (Ω') التي مركزها المبدأ O (لان النقطة O صامدة بالتحويل S) ونصف قطرها $r' = 2r = 4\sqrt{2}$.

التمرين55: دورة 2017 م2

I)كتابة $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتاج الجذرين التربيعيين للعدد المركب $\frac{21}{4}+5i$

لدينا $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+2\left(\frac{5}{2}\right)i+i^2=\frac{25}{4}+5i-1=\frac{21}{4}+5i$

من الجواب السابق لدينا $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\frac{21}{4}+5i$ نستنتج ان:

$\frac{5}{2}+i$ هو جذر تربيعي والجذر التربيعي الاخر هو معاكسة $-\frac{5}{2}-i$

II)1) كتابة كلا من z_A و z_C على الشكل الجبري.

لدينا: $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ومنه $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\frac{5}{2}+i$

ولدينا : $z_C=-\overline{z_A}$ ومنه : $z_C=-\overline{\frac{5}{2}+i}=-\frac{5}{2}+i$

2) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC.

لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-1+i}{1+i}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$

من الجواب السابق لدينا : $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{\frac{\pi}{2}i}$ وتكافئ $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$

ومعناه $AB=BC$ و $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ وعليه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

3- أ)كتابة العبارة المركبة للتشابه S .

لدينا: S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحوّل A إلى I.

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'-z_\omega=a(z-z_\omega)$

ومنه : $z_I-z_B=a(z_A-z_B)$ أي $a=\frac{z_I-z_B}{z_A-z_B}=\frac{5i}{5+5i}=\frac{1+i}{2}$

وعليه العبارة المركبة للتشابه S هي $z'+\frac{3}{2}i=\frac{1+i}{2}(z+\frac{3}{2}i)$ (العبارة المركبة المبسطة)

أو على الشكل $z'=\frac{1+i}{2}z-\frac{3(1+i)}{4}$ (العبارة المركبة)

تعيين نسبته وزاويه التشابه S

من الجواب السابق لدينا: $a=\frac{1+i}{2}$

وعليه نسبة التشابه S هي $|a|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته هي $\arg(a)=\arg\left(\frac{1+i}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ب)تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون T_n تحاكيا.

لدينا: التحويل النقطي T_n كمايلي: $T_n=\underbrace{SoSo.....S}_{n\ \text{مرة}}$

ومنه: $T_n=\underbrace{SoSo.....S}_{n\ \text{مرة}}=T_n(B;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;\frac{n\pi}{4})$ خاصية تركيب عدة تشابهات

T_n تحاكيا معناه $\arg(T_n)=k\pi$ أي $\frac{n\pi}{4}=k\pi$ إذن $n=4k$ حيث k عدد طبيعي

تعيّين عندئذ العناصر المميزة للتحاكي T_n.

لدينا من الجواب السابق $T_n(B;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;\frac{n\pi}{4})$ حيث $n=4k$ أي $T_n(B;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n)$

وعليه T_n مركزه B ونسبته: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ (k عدد طبيعي زوجي) و $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ (k عدد طبيعي فردي)

التمرين56: دورة 2017 الاستدراكية م1

I)حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2z^2-10z+\frac{29}{2}=0$

لدينا: $2z^2-10z+\frac{29}{2}=0$ تكافئ $z^2-5z+\frac{29}{4}=0$ تكافئ $(z-\frac{5}{2})^2=-1=i^2$

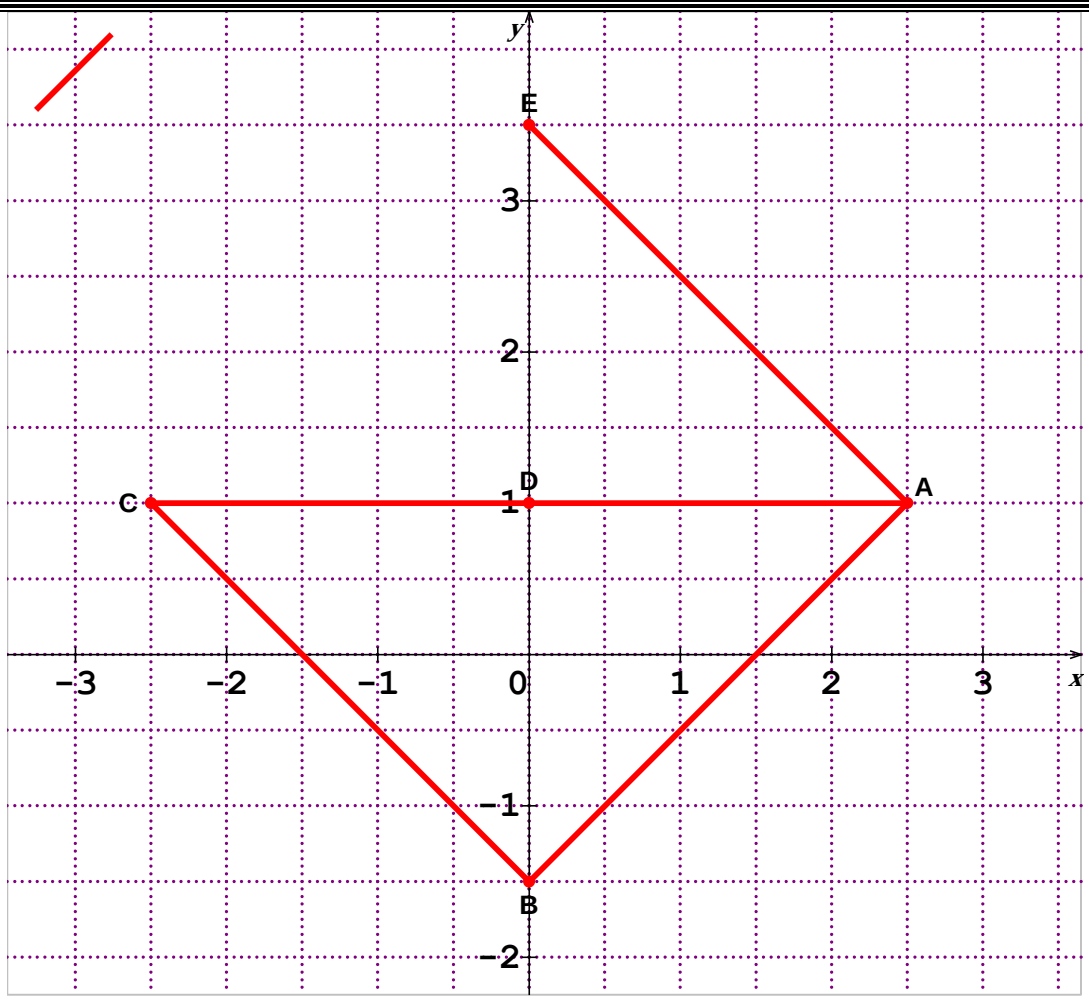
تكافئ $z=\frac{5}{2}+i$ أو $z=\frac{5}{2}-i$

II)1-أ) كتابة كلا من z_A، z_B على الشكل الجبري

لدينا: $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{5}{2}+i$ و $z_B=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}(0-i)=-\frac{3}{2}i$

تعليم النقط A، B، C و D في المعلم السابق

لدينا: $z_A=\frac{5}{2}+i$ و $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z_A}=-\frac{5}{2}+i$ و $z_D=i$.



ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ لشكل الأسي .

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}{-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i} = \frac{1+i}{-1+i} = \frac{-(1+i)^2}{|-1+i|^2} = -i = 1.e^{-\frac{\pi}{2}i}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = 1.e^{-\frac{\pi}{2}i}$ وتعني هندسيا : $AB = CB$ و $-\frac{\pi}{2}$ قيسا للزواية $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$

ومنه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

2) إيجاد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة للنقطة D .

لدينا : E نظيرة B بالنسبة للنقطة D ومنه $z_E + z_B = 2z_D$ أي $z_E = 2z_D - z_B = \frac{7}{2}i$

استنتاج طبيعة الرباعي ABCE .

لدينا :القطران [BE] و [CA] لهما نفس المنتصف النقطة D .....(1)

المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.....(2):

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي ABCE مربعا.

3)كتابة العبارة المركبة للتشابه S .

لدينا: التشابه S مركزه B الذي يحوّل A إلى D.

العبارة المركبة المناسبة للتشابه S هي: $z'-z_\omega=a(z-z_\omega)$ حيث a عدد مركب

وعليه: $z_D-z_B=a(z_A-z_B)$ أي $a=\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{i(1-i)}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

ومنه العبارة المركبة المختصرة هي: $z'+\dfrac{3}{2}i=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}(z+\dfrac{3}{2}i)$

تحديد النسبة والزاوية للتشابه S

من العبارة المركبة للتشابه S لدينا : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

ومنه نسبة التشابه S هي $k=|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته هي $\theta=\arg(a)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

الخلاصة: $S(B;\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\pi}{4})$

4-أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n-z_B=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$

*التحقق من صحة P(0)

من اجل n=0 يكون: $z_0-z_B=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ محققة لأن $z_0-z_B=z_A-z_B=5.\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

*نفرض أن P(n) صحيحة أي: $z_n-z_B=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$

ونبرهن أن P(n+1) صحيحة أي: $z_{n+1}-z_B=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2}e^{i\frac{\pi}{4}(n+2)}$

من تعريف المتتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لدينا: $A_{n+1}=S(A_n)$ ومعناه $z_{n+1}-z_B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}(z_n-z_B)$

ومنه $z_{n+1}-z_B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$ لأن $z_n-z_B=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$ فرضية التراجع

أي $z_{n+1}-z_B=5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2}e^{i\frac{\pi}{4}(n+2)}$ لأن $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $e^{i\frac{\pi}{4}(n+2)}=e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}.e^{i\frac{\pi}{4}}$

الخلاصة: $z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب)تعيّين قيم n الطبيعية حتى تنتمي النقط A_n إلى المستقيم (AB)

النقط A_n تنتمي إلى المستقيم (AB) معناه $\arg(\frac{z_n - z_B}{z_A - z_B}) = k\pi$

$\arg(\frac{z_n - z_B}{z_A - z_B}) = k\pi$ تكافئ $e^{i\frac{\pi}{4}n} = e^{ik\pi}$ ومعناه $n = 4k$ حيث k عدد طبيعي.

التمرين57: دورة 2017 الاستدراكية م2

I-1)تعيّين الحلّين z_1 و z_2 المعادلة (E).

لدينا: $z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \ldots..(E)$

لحل المعادلة (E) نستعمل المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

لدينا: $\Delta = 4(1-\sin\alpha)^2 - 8(1-\sin\alpha) = 4(\sin^2(\alpha) - 1) = -4\cos^2(\alpha) = (2i\cos\alpha)^2$

$\Delta \prec 0$ معناه المعادلة (E) تقبل حليّن مترافقين هما:

$z_1 = \frac{2(1-\sin\alpha) - 2i\cos\alpha}{2} = 1 - \sin\alpha - i\cos\alpha$ و $z_2 = \overline{z_1} = = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$

2) تبيّان أن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$ من أجل $\alpha = \frac{\pi}{6}$

من أجل $\alpha = \frac{\pi}{6}$ يكون لدينا: $z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi}{3}}$ و $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-4\pi}{3}}$

ومنه : $z_1^{2017} + z_2^{2017} = e^{\frac{4\pi}{3}(2017)} + e^{\frac{-4\pi}{3}(2017)} = 2\cos\left[\frac{4\pi}{3}(2017)\right]$ لان: $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ خاصية

لأن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 2\cos\left[\frac{4\pi}{3}(2017)\right] = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$

$\frac{4\pi}{3}(2017) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

II-1) تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

لدينا: $\frac{z_A}{\overline{z_A}} = \frac{(z_A)^2}{|\overline{z_A}|^2} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ لأن $(z_A)^2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ الشكل الاسي و $|\overline{z_A}|^2 = 1$

ومنه : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = e^{\frac{2n\pi}{3}i}$ حسب دستور موافر

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا معناه $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = 2k\pi$

ومعناه $\frac{2n\pi}{3}\equiv 0[2\pi]$ أي $n\equiv 0[3]$ إذن $n=3k$ مع $k\in\mathbb{N}$

2) تعيين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

التحويل S معرف بالعبارة التالية: $z'=(1+z_A)z+2z_B$

طبيعة التحويل: لدينا: $|(1+z_A)|=\left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}\neq 1$ ومنه التحويل S تشابه مباشر

العناصر المميزة: النسبة هي:

$k=|1+z_A|=\sqrt{3}$

الزاوية: $\theta=\arg(1+z_A)=\arg\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

المركز هو ω حيث: $z_\omega=\frac{2z_B}{1-(1+z_A)}=-\frac{2\overline{z_A}}{z_A}=-\frac{2(\overline{z_A})^2}{|z_A|^2}=-2(\overline{z_A})^2=2z_A=z_C$

الخلاصة: $S(C;\sqrt{3};\frac{\pi}{6})$

3) التحقق ان النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وإنشئها.

(Γ) مجموعة النقط M ذات الاحقة z حيث $\arg(\overline{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

*التحقق: النقطة C تنتمي إلى (Γ) معناه $\arg(\overline{z_C}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

لدينا: $\arg(\overline{z_C}-z_B)=\arg(2\overline{z_A}-z_B)=\arg(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

*تحديد طبيعة المجموعة (Γ):

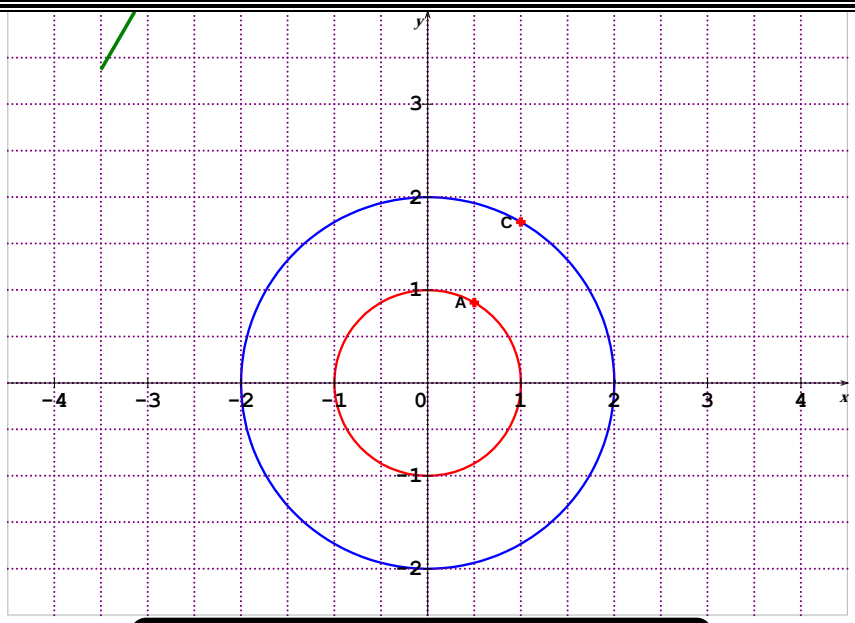
لدينا: $\arg(\overline{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ تكافئ $\arg(\overline{\overline{z}-z_B})=+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ لأن $\overline{\overline{z}-z_B}=z-\overline{z_B}=z-z_A$

العبارة $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ هندسيا تعني $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

وبما أن $C\in(\Gamma)$ فإن مجموعة النقط (Γ) هي نصف المستقيم $[AC)$ بإستثناء النقطة A

*الإنشاء:



التمرين58: دورة 2016 م1

1)حل المعادلة $z^2-4z+5=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $z^2-4z+5=0$ تكافئ $z^2-4z+4=-1$ وتكافئ $(z-2)^2=-1$

ومنه: $(z-2)=i$ أو $(z-2)=-i$ وعليه الحلين هما: $z=2+i$ أو $z=2-i$

ب)استنتاج حلول المعادلة $(z+1+i(1-\sqrt{3}))^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$

نضع: $(z+1+i(1-\sqrt{3}))^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0....(e)$

لدينا:(e) تكافئ $(z+1+i(1-\sqrt{3}))^2-4(z+1+i(1-\sqrt{3}))+5=0$

وتكافئ $Z^2-4Z+5=0$ حيث $Z=z+1+i(1-\sqrt{3})$

من الجواب أ) نستنتج أن : $z+1+i(1-\sqrt{3})=2+i$ أو $z+1+i(1-\sqrt{3})=2-i$

ومنه: $z=-1-i+i\sqrt{3}+2-i=1+i(\sqrt{3}-2)$ أو $z=-1-i+i\sqrt{3}+2+i=1+i\sqrt{3}$

2-أ)كتابة العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي

لدينا: $1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب)تعيين θ بحيث : $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{\frac{\pi}{2}i}$

لدينا: z_0 عدد مركب طويلته وθ عمدة له أي: $z_0=e^{\theta i}$ و $\overline{z_0}=e^{-\theta i}$ حيث $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ومنه: $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{\frac{\pi}{2}i}$ تكافئ $2e^{2\theta i}.e^{\frac{\pi}{3}i}=2e^{\frac{\pi}{2}i}$ وتكافئ $e^{(2\theta+\frac{\pi}{3})i}=e^{\frac{\pi}{2}i}$

وعليه: $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ لكن $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ومنه $2\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ أي $\theta=\frac{\pi}{12}$

ج) كتابة العدد المركب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي

لدينا: $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n = \left[\frac{e^{\frac{\pi}{12}}2.e^{\frac{\pi}{3}}}{2}\right]^n = e^{i\frac{5\pi}{12}n} = \cos(n\frac{5\pi}{12}) + i\sin(n\frac{5\pi}{12})$.

د)تعيين قيم العدد الطبيعي n

$\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجب تماما معناه $\sin(n\frac{5\pi}{12}) = 0$ و $\cos(n\frac{5\pi}{12}) \succ 0$

ومنه: $(n\frac{5\pi}{12}) \equiv 0[2\pi]$ أي $(5n) \equiv 0[24]$ ومنه $n = 24k$ حيث k عدد طبيعي.

3-أ) تعيين z_D لاحقة D

لدينا: D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$

$z_D = \frac{1z_A - 1z_B + 1z_C}{1-1+1} = \frac{(2-i)-(2+i)+(1+i\sqrt{3})}{1} = 1+i(-2+\sqrt{3})$.

ب) استنتاج طبيعة الرباعي ABCD

لدينا: $z_B - z_A = 2i$ و $z_C - z_D = 2i$ ومنه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وعليه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

ج) تبيان أن $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

لدينا: $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \arg(\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$ وتكافئ $\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2i$

تكافئ $z_E - z_A = (z_E - z_B)2i$ ومنه: $z_E = \frac{z_A - z_B.2i}{1-2i} = \frac{4-5i}{1-2i} = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$ بضرب الحدين في المرافق

-تبيان أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر وتعيين عناصره المميزة

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2i$ وتكافئ $z_A - z_E = 2e^{\frac{\pi}{2}i}(z_B - z_E)$.....(*)

المساواة (*) تعني أن A هي صورة B بتشابه مباشر مركزه E ونسبته2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

4-أ) تعيين لاحقة النقطة I

لدينا: I منتصف القطعة $[AB]$ وعليه: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 2$

ب-) التحقق أن النقطة E تنتمي للمجموعة (Γ)

لدينا: (Γ)هي مجموعة النقط $M(z)$ حيث: $z-z_I=e^{i\alpha}$

ومنه: النقطة E تنتمي للمجموعة (Γ)معناه $z_E-z_I=e^{i\alpha}$ لدينا: $z_E-z_I=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i-2=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

-نعيين المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة لم يتغير α في $\mathbb{R}$

$z-z_I=e^{i\alpha}$ تكافئ $|z-z_I|=1$ وتكافئ $IM=1$ لأن α تمسح $\mathbb{R}$

ومنه:مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة ذات المركز I ونصف القطر 1

التمرين59: دورة 2016 م2

I-1) حل المعادلة $z^2-2z+2=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $z^2-2z+2=0$ تكافئ $z^2-2z+1=-1$ وتكافئ $(z-1)^2=i^2$

ومنه: $(z-1)^2=i^2$تكافئ $z=1+i$ أو $z=1-i$.

2-إيجاد العددين z_1 و z_2

لدينا: $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$ بجمع المعادلتين طرف لطرف نجد: $3z_1=3i\sqrt{2}$ أي $z_1=i\sqrt{2}$

بعد التعويض عن قيمة $z_1=i\sqrt{2}$ في إحدى المعادلتين نجد : $z_2=-i\sqrt{2}$

II-1)كتابة z_Hعلى الشكل الأسي واستنتاج نوع المثلث BEC

لدينا: $z_H=\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$ أي $z_E=-z_D$

$z_H=\frac{1+i(1+\sqrt{2})}{-1+i(1+\sqrt{2})}$بعد ضرب حدي z_H في مرافق المقام نجد: $z_H=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

المثلث BEC متساوي الساقين لأن: $|z_E|=1$ أي $BC=BE$

2 -أ)تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

لدينا :العبارة المركبة للتحويل S هي: $z'=z_A.z+z_B$

لدينا: $|z_A|=\sqrt{2}\neq 1$ وعليه التحويل S هو تشابه مباشر

نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(z_A)=\frac{\pi}{2}$ ومركزه ω حيث $z_\omega=\frac{z_B}{1-z_A}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$

ب)حساب مساحة الدائرة (γ)

مساحة الدائرة (γ)ذات المركز C ونصف القطر CD

تعطى بالعلاقة: $s_{(\gamma)}=\pi r^2=\pi CD^2=4\pi(u.a)$ لأن: $CD=|z_D-z_C|=|-2i|=2$

ج)تعيين (γ') صورة الدائرة (γ)بالتحوّيل S واستنتاج مساحتها

صورة لدائرة (γ)بالتحوّيل S هي الدائرة (γ') ذات المركز C' ونصف القطر $2\sqrt{2}$

حيث $S(C)=C'$ أي $z_{C'}=z_A.z_C+z_B=-\sqrt{2}$.

مساحة الدائرة (γ') هي $s_{(\gamma')}=(\sqrt{2})^2.s_{(\gamma)}=8\pi(u.a)$

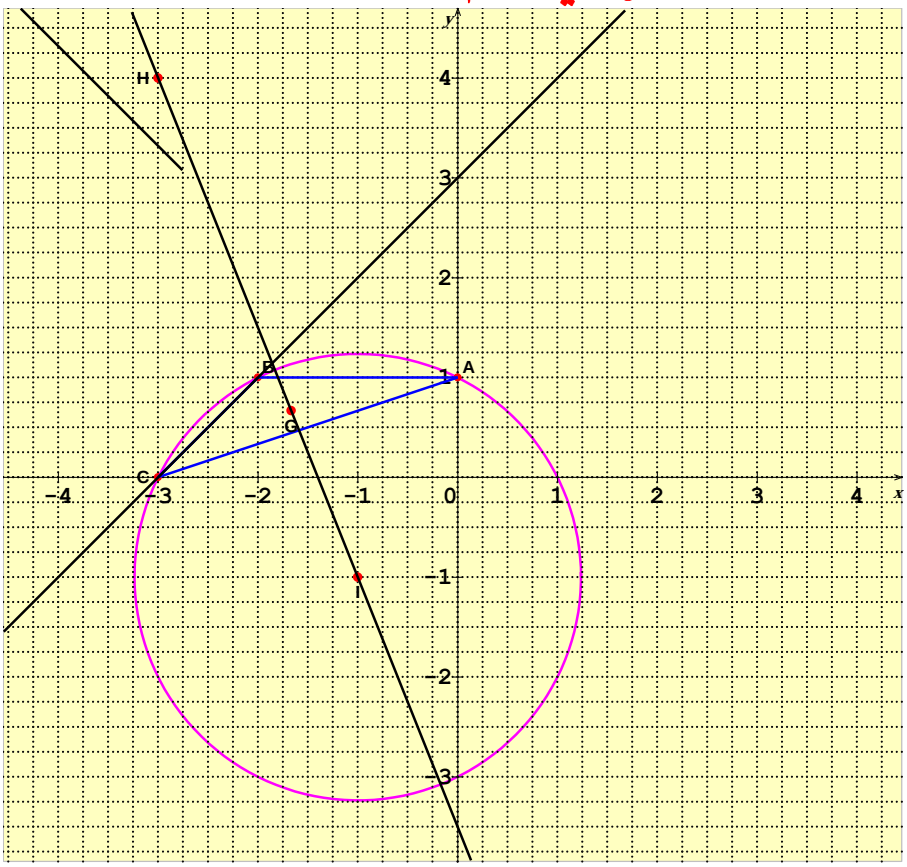
3) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ **والتي من أجلها يكون** $\frac{z_B-z}{z_C-z}$ **حقيقيا سالبا.**

$\frac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالب معناه $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_C-z}\right)=(2k+1)\pi$ ومعناه $(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{BM})=(2k+1)\pi$

ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي القطعة المستقيمة $[CD]$ بستثناء النقطتين C و D.

التمرين60: دورة 2015 م1

1-أ)تمثيل النقط A ، B ، C ، H و I **في المعلم** $(O;\vec{u};\vec{v})$.



ب) تعيين النسبة وزاوية التشابه المباشر

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي $z'-z_\omega=ke^{\theta}(z-z_\omega)$

ولدينا:التشابه المباشر مركزه B ويحوّل النقطة A إلى النقطة C

وعليه العبارة هي: $z_C-z_B=ke^{\theta}(z_A-z_B)$ ومنه: $ke^{\theta}=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

تطبيق عددي: $ke^{\theta}=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-3+2-i}{i+2-i}=\frac{-1-i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$

وعليه :نسبة التشابه هي $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta=\frac{5\pi}{4}$ زاوية له.

2)تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

G مركز ثقل المثلث ABC معناه $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{i+(-2+i)+(-3)}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$

3)-أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ على الشكل الجبري.

لدينا: $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=\frac{-2+i+3}{-3+4i-i}=\frac{1+i}{-3(1-i)}=\frac{(1+i)^2}{-3(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{3}i$

ب)إستنتاج أن المستقيمين (AH) و(BC) متعامدان.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=-\frac{1}{3}i$ معناه $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ تخيلي صرف

ومنه : المستقيمين (AH) و(BC) متعامدان.

ج)تبيان أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

من الجواب السابق لدينا: (AH) ⊥ (BC) معناه (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC]

ولدينا: (BH) ⊥ (AC) معناه (BH) الارتفاع المتعلق بالضلع [AC]

لأن: $\frac{z_B-z_H}{z_C-z_A}=i$ تخيلي صرف ومنه : H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

4)تبيان ان النقط G ، H و I في استقامية.

النقط G ، H و I في استقامية معناه العدد المركب $\frac{z_G-z_H}{z_I-z_H}$ حقيقي.

بعد الحساب والتسيط نجد $\frac{z_G-z_H}{z_I-z_H}=\frac{2}{3}$.

5)-أ) تبيان أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ)

لدينا (Γ) مجموعة النقط من المستوي M(z) حيث: $z+1+i=\sqrt{5}e^{\theta i}$

A تنتمي إلى المجموعة (Γ) معناه $z_A+1+i=\sqrt{5}e^{\theta i}$

لدينا: $|z_A+1+i|=|1+2i|=|1+2i||e^{\theta i}|=\sqrt{5}$ لأن $|e^{\theta i}|=1$

ب)تعيين طبيعة المجموعة (Γ)

لدينا: $z+1+i=\sqrt{5}e^{\theta i}$ تكافئ $|z-z_I|=\sqrt{5}$ أي $IM=\sqrt{5}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

ج) إنشاء المجموعة (Γ) (أنظر 1- أ).

د) التحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ)

B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) لأن: $IB=\sqrt{5}$ و $IC=\sqrt{5}$

التمرين61: دورة 2015 م2

1) حل المعادلة التالية في المجموعة $\mathbb{C}$:

لدينا: $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'^2-a.c=(1-\sqrt{3})^2-8=-4-2\sqrt{3}=-(4+2\sqrt{3})$$

$$\Delta'=\left[i(1+\sqrt{3})\right]^2 \text{ أي } \Delta'=\left[i(1+\sqrt{3})\right]^2 \text{ حيث } \delta=i(1+\sqrt{3})$$

المعادلة تقبل حلّين مترافقين هما: $z'=\frac{-b'-\delta}{a}=(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})$ و $z''=\frac{-b'+\delta}{a}=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$

2-أ) تبيان أن: $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

لدينا: $\frac{z_B}{z_A}=\frac{z_B.\overline{z_A}}{z_A.\overline{z_A}}=\frac{(z_B)^2}{|z_A|^2}=\frac{\left[(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})\right]^2}{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{8}$

ومنه $\frac{z_B}{z_A}=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$ لاحظ أن $\frac{-7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\pi$

ب) استنتاج عمدة للعدد المركب z_A

لدينا: $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$ ومنه: $z_A=z_B.e^{\frac{7\pi}{6}i}$ ومنه $z_A=\overline{z_A}.e^{\frac{7\pi}{6}i}$ لأن $z_B=\overline{z_A}$

وعليه: $\arg(z_A)=-\arg(z_A)+\frac{7\pi}{6}$ لأن $\arg(\overline{z_A})=-\arg(z_A)$ خاصية

لدينا: $\arg(z_A)=-\arg(z_A)+\frac{7\pi}{6}$ تكافئ $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{12}$.

جـ) استنتاج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

لدينا من الجواب 2- أ) أن $|z_A|^2=8$ ومنه: $|z_A|=2\sqrt{2}$

ولدينا: $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{12}$ وعليه: $z_A=2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})....(1)$

ولدينا أيضا من جهة أخرى $z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})....(2)$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و (2) نجد:

$$\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}=1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=1+\sqrt{3}\end{cases}$$

3-أ) حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد الصحيحة: $7x-2y=1$

لدينا: $7x-2y=1$ تكافئ $7x=2y+1$ وتكافئ $7x\equiv 1[2]$

ومنه: $x\equiv 1[2]$ أي $x=2k+1$ حيث k عدد صحيح.

لدينا: $7x-2y=1$ تكافئ $2y=7x-1$

بعد تعويض قيمة $x=2k+1$ في هذه المعادلة نجد: $2y=7(2k+1)-1$

ومنه: $2y=7.2k+6$ أي $y=7k+3$.

حلول المعادلة $7x-2y=1$ هي $(x;y)=(2k+1;7k+3)$ حيث k عدد صحيح

ب)تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x مضاعفا للعدد 12.

الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $7x-24y=12$ معناه $7x=12(y+1)$

من المعادلة $7x=12(y+1)$ نستنتج أن 12 يقسم $7x$ ومنه 12 يقسم x

أي x مضاعفا للعدد 12 لأن 12 أولي مع 7 وذلك حسب مبرهنة غوص.

ج)استنتاج حلول المعادلة $7x-24y=12$.

من الجواب السابق لدينا: x مضاعفا للعدد 12 معناه $x=12k'$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$.

بعد تعويض قيمة $x=12k'$ في المعادلة $7x-24y=12$ نجد: $24y=7(12k')-12$

أي $2y=7k'-1$ أي $2y=-1[7]$ أي $2y=6[7]$

ومنه $y=3[7]$ إذن: $y=7k'+3$

حلول المعادلة $7x-24y=12$ هي $(x;y)=(12k';7k'+3)$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$

د)تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

$(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما معناه $\arg(z_A)^n\equiv\pi[2\pi]$

$\arg(z_A)^n\equiv\pi[2\pi]$ تكافئ $\frac{7n\pi}{12}\equiv\pi[2\pi]$ وتكافئ $7n\equiv 12[24]$

$7n\equiv 12[24]$ ومنه $n=12p$ حيث $p\in\mathbb{N}$ حسب الجواب السابق

التمرين62: دورة 2014 م1

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$

لدينا: $(z-1-2i)\left[z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}\right]=0$ يكافئ $z-1-2i=0$

أو $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$ أي $z=1+2i$ أو $\left[z-(1+\sqrt{3})\right]^2=-1$

إذن ،حلول المعادلة هي: $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1+\sqrt{3}-i$

2) أ)تبيّان أن: $AB=CD$ و $(AD)//(BC)$.

لدينا: $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$.

- $AB=|z_B-z_A|=|\overline{z_B-z_A}|=|\bar{z}_B-\bar{z}_A|=DC=2$

• $z_C - z_B = z_C - \overline{z}_C = -2i$ و $z_D - z_A = \overline{z}_A - z_A = -4i$

إذن : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ أي $(AD) // (BC)$.

ب) التحقق أنّ: $\frac{z_A + z_C}{2} \neq \frac{z_B + z_D}{2}$ واستنتاج طبيعة الرباعي ABCD

$z_A + z_C = 2 + \sqrt{3} + i$ و $z_B + z_D = 2 + \sqrt{3} - i$ ومنه $\frac{z_A + z_C}{2} \neq \frac{z_B + z_D}{2}$.

• **الاستنتاج** : ABCD شبه منحرف متقايس الساقين.

3-أ)تبيّان أنّ: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ واستنتاج أن D صورة A بتشابه مباشر مركزه B وتعيين نسبته وزاويته

لدينا: $z_D - z_B = -\sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})$ و $z_A - z_B = -(\sqrt{3} - i)$

ومنه: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{4} = \sqrt{3}i$ إذن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

الاستنتاج : لدينا $(z_D - z_B) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$ أي $\begin{cases} BD = BA\sqrt{3} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

إذن : D هي صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب)تبيّان أنّ المثلث ADB قائم وان النقط A، B، C وD تنتمي لدائرة واحدة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

مما سبق $(BD) \perp (BA)$ ومنه المثلث ABD قائم في B. أي النقط A، B وD تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AD] و مركزها $I(1;0)$.

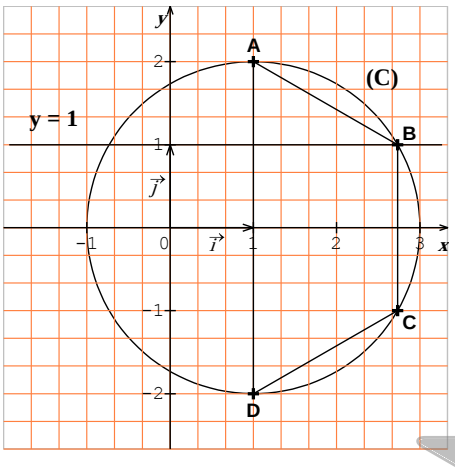
بما أن محور الفواصل محور [BC] فإن $IB = IC$.

وأخيرا : النقط A، B، C وD تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها $IA = 2$.

ج)استنتاج إنشاء للرباعي ABCD .

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $I(1;0)$ وتمر بالنقطة A.

B هي نقطة تقاطع الدائرة (C) والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ وفاصلتها موجبة و C نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل.



التمرين 63: دورة 2014 م2

1) كتابة العدد المركب $1+i$ على شكل أسي .

لدينا: طويلة العدد المركب $1+i$ هي $|1+i| = \sqrt{2}$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب $1+i$ هو : $1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$

2-أ) إيجاد لاحقة النقطة 'D صورة D بالتحويل S، والإستنتاج

لدينا: النقطة 'D صورة D بالتحويل S، حيث لاحقة D هي d=2i وعبارة S هي: $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$

ومنه: $z_{D'}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_D+2=(1+i)(2i)+2=2i$

من العبارة السابقة نلاحظ أن: $z_{D'}=z_D$ نستنتج أن النقطة D صامدة بالتحويل S.

ب)تبيّان أن : $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتاج طبيعة وعناصر التحويل S.

*لدينا: $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$ تكافئ $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{-i\frac{\pi}{2}}$

وتكافئ $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2i)$ وتكافئ $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$

*من العبارة $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ نستنتج ان :

التحويل S هو تشابه مباشر لأن: $\left|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right|=\sqrt{2}\neq 1$

العناصر المميزة للتشابه S هي: المركز D لأنها نقطة صامدة ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})=\frac{\pi}{4}$

3- أ)التحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) .

النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) لأن: الثنائية $(-3;4)$ تحقق صحة المعادلة $3x+5y=11$

تعيين نقط (Δ) التي إحداثياها أعداد صحيحة.

نقط (Δ) التي إحداثياها أعداد صحيحة هي النقط التي احداثيتها حلول المعادلة $3x+5y=11$

البحث عن حلول المعادلة $3x+5y=11$

بما أن $(-3;4)$ حلا خاصا للمعادلة $3x+5y=11$ فإن: (s) .... $\begin{cases}3x+5y=11\\3(-3)+5(4)=11\end{cases}$

الجملة (s) تكافئ $3(x+3)+5(y-4)=0$ وتكافئ $3(x+3)=5(4-y)=0$

من المعادلة $3(x+3)=5(4-y)=0$ نستنتج أن:

*$3/5(4-y)$ وبما أن 3 أولي مع 5 فإن $3/(4-y)$ (حسب مبرهنة غوس) ومنه: $y=-3k+4$

*$5/3(x+3)$ وبما أن 5 أولي مع 3 فإن $5/(x+3)$ (حسب مبرهنة غوس) ومنه: $x=5k-3$

وعليه نقط (Δ) التي إحداثياها أعداد صحيحة هي النقط التي احداثيتها

$(x;y)=(5k-3;-3k+4)$ حيث k عدد صحيح.

ب)تبيان أن المستقيمين (BM_0') و (BA) متعامدان .

لدينا: M_0' صورة M_0 بالتحويل S ومنه لاحقة النقطة M_0' هي:

$$z_{M_0'} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_{M_0} + 2 = (1+i)(-3+4i) + 2 = -5+i$$

المستقيمان (BM_0') و (BA) متعامدان معناه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM_0'} = 0$

لدينا: $\overrightarrow{BA}(-1;4) \cdot \overrightarrow{BM_0'}(-4;-1) = -1.(-4) + 4.(-1) = 0$ ومنه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM_0'} = 0$.

4)تعيين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان

(BA) و (BM') متعامدان معناه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM'} = 0$

$$\overrightarrow{BA}(-1;4) \cdot \overrightarrow{BM'}(x-y+3;x+y-2) = -1(x-y+3) + 4(x+y-2) = 0 :$$

ومنه: $3x+5y=11$ حيث $-5 \le x \le 5$ و $-5 \le y \le 5$

لدينا: حلول المعادلة $3x+5y=11$ هي $(x;y) = (5k-3;-3k+4)$

ومنه: $\begin{cases} -5 \le y \le 5 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$ أي $\begin{cases} -5 \le 5k-3 \le 5 \\ -5 \le -3k+4 \le 5 \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} \frac{-2}{5} \le k \le \frac{8}{5} \\ -\frac{1}{3} \le k \le 3 \end{cases}$ ومنه $k \in \{0;1\}$

ومنه توجد نقطتان احداثيهما: $(-3;4)$ و $(2;1)$.

التمرين64: دورة 2013 م1

I-1.أ-كتابة على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

$$\frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+i}{-1+i} = \frac{-(1+i)^2}{2} = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i} *$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A} = e^{\frac{3\pi}{2}i} * \text{ تكافئ } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_O} = e^{\frac{3\pi}{2}i} \text{ و } \left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_O}\right| = 1$$

$$\text{تكافئ } \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_O}\right) = \frac{3\pi}{2} \text{ و } OB = AB$$

ومنه: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BA})=\frac{3\pi}{2}$ و $OB=AB$ و منه المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين

ب-تحدّيد طبيعة الرباعي OABC ثم استنتاج مساحته

لدينا: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$ لأن: $z_{\overrightarrow{OA}}=ae^{\frac{3\pi}{4}i}$ و $z_{\overrightarrow{CB}}=-a\sqrt{2}-ae^{-\frac{3\pi}{4}i}=a(-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=a(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=ae^{\frac{3\pi}{4}i}$

ولدينا: المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين من الجواب السابق

نستنتج مما سبق أن الرباعي OABC مربعا.

مساحة المربع OABC هي : $S=OA.OC=|z_A|.|z_C|=a^2$

2- أ-كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم التحقق أن: $S(A)=E$.

التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$، يحول كل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$

العبارة الركبة للتشابه المباشر S هي: $z'=\frac{b}{a}e^{\frac{3\pi}{4}i}z$

باستعمال العبارة $z'=\frac{b}{a}e^{\frac{3\pi}{4}i}z$ نجد: $z_E=\frac{b}{a}e^{\frac{3\pi}{4}i}z_A=\frac{b}{a}e^{\frac{3\pi}{4}i}.ae^{\frac{3\pi}{4}i}=be^{\frac{3\pi}{2}i}$

ب-تبيّان أن مساحة الرباعي OEFG هي b^2

لدينا الرباعي OEFG مربع لأنه صورة المربع OABC بالتشابه المباشر S لأن:

$S(B)=F$ و $S(C)=G$ و $S(A)=E$ و $S(O)=O$.

ومنه مساحة الرباعي OEFG تساوي $S'=\left(\frac{b}{a}\right)^2S=\left(\frac{b}{a}\right)^2.a^2=b^2$

3.أ-حساب بدلالة a وb العبارة: $|z_C|^2+|z_E|^2-2|z_C\times z_E|\cos(\arg\frac{z_C}{z_E})$.

لدينا: $|z_C|^2+|z_E|^2-2|z_C\times z_E|\cos(\arg\frac{z_C}{z_E})=a^2+b^2-2a.b\cos(\frac{\pi}{4})=a^2+b^2-\sqrt{2}a.b$

ب-استنتاج CE^2 بدلالة a وb.

لدينا: $CE^2=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE})^2=CO^2+OE^2-2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OE}\cos(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE})$ علاقة الكاشي

ومنه: $CE^2=|z_C|^2+|z_E|^2-2|z_C\times z_E|\cos(\arg\frac{z_C}{z_E})=a^2+b^2-\sqrt{2}a.b$

التمرين65: دورة 2013 م2

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2+z+1=0$.

لدينا: $z^2+z+1=0$ تكافئ $\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$ وتكافئ $\left(z+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $\left(z+\frac{1}{2}\right)=+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ومنه حلي المعادلة هما : $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2- أ- كتابة z_A على الشكل الأسي.

لدينا: $z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ولدينا: $|z_A|=\left|-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|=1$ وعليه $z_A=1(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

ب-تعيين مجموعة النقط M من المستوي ، حيث : $\arg(z-z_A)^2=\arg(z_A)-\arg(z_B)$.

$\arg(z-z_A)^2=\arg(z_A)-\arg(z_B)$ تكافئ $2\arg(z-z_A)=\frac{8\pi}{3}$ وتكافئ $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$

ومنه: $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{4\pi}{3}$ أي أن مجموعة النقط M هي المستقيم $(OA)-\{A\}$.

3-أ—تعيين طبيعة التحويل r وتعيين عناصره المميزة .

لدينا العبارة المركبة للتحويل r هي: $z'=z_A.z+z_B.\sqrt{3}$

بما أن $z_A=1.e^{\frac{4\pi}{3}i}$ فإن r هو دوران لأن $|z_A|=1$.

العناصر المميزة هي:الزاوية هي $\arg(z_A)=\frac{4\pi}{3}$ والمركز $\omega(0;1)$

لأن $z_\omega=\frac{z_B.\sqrt{3}}{1-z_A}=\frac{e^{-\frac{4\pi}{3}i}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

ب- تعيين نسبة ومركز التحاكي h

لدينا العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z'=-2z+3i$

وعليه: نسبة التشابه هي :k=-2 ومركزه $\omega(0;1)$ لأن لاحقة المركز هي : $z_\omega=\frac{3i}{1+2}=i$

جـ- تعيين طبيعة التحويل S وإبرازا عناصره المميزة

لدينا:S=hor:: ومنه S هو تركيب الدوران r متبوع بالتحاكي h

ومنه :S هو تشابه مباشر مركزه $\omega(0;1)$ وزاويته $\theta=\pi+\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ ونسبته $k'=|k|=2$

التحقق أن عبارته المركبة هي: $z'=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z-i)+i$.

العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي : $z'-z_\omega=k'e^{\theta i}(z-z_\omega)$

من الجواب السابق جـ) لدينا: $z_\omega=i$ و $k'=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$

ومنه: $z'-i=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z-i)$ أي $z'=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z-i)+i$.

4-تبيّان أن النقط O ،Ω و E في استقامية

النقط O ،Ω و E في استقامية معناه $\frac{z_\omega-z_O}{z_E-z_O}=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

لدينا: S(O)=C،S(C)=D و S(D)=E

ومنه:S(O)=C معناه $z_C=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z_O-i)+i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}+i$

S(C)=D: معناه $z_D=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z_C-i)+i=4e^{\frac{\pi}{6}i}+i$

S(D)=E معناه $z_E=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z_D-i)+i=8e^{\frac{\pi}{2}i}+i=9i$

ومنه النقط O ،Ω و E في استقامية. $\frac{z_\omega-z_O}{z_E-z_O}=\frac{i}{9i}=\frac{1}{9}\in\mathbb{R}$

5.أ-تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z=2e^{\theta i}+e^{\frac{\pi}{2}i}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

لدينا: $z=2e^{\theta i}+e^{\frac{\pi}{2}i}$ تكافئ $z-i=2e^{\theta i}$ وتكافئ $|z-z_{\omega}|=2$ أي $\omega M=2$

ومنه : مجموعة النقط (Γ)هي دائرة مركزها ωونصف قطرها 2.

ب-تعيين (Γ')صورة (Γ)بالتحويل S

(Γ')صورة (Γ)بالتحويل S هي الدائرة ذات المركز ω (ω نقطة صامدة) ونصف القطر $r'=2r=4$

التمرين66: دورة 2012 م1

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

نحل المعادلة $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ باستعمال المميز Δ

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{2})^2-4=-2=(\sqrt{2}i)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلّين مترافقين هما: $z'=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ و $z''=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

أ-كتابة على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

لدينا: $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=1(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=1.e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $z_B=\overline{z_A}=1.e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و $\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{4}i}}=e^{2\frac{\pi}{4}i}=i$

ب-تعيين لاحقة كل من A'، B'و C'

لدينا : A'، B'و C'صور النقط A، Bو Cعلى الترتيب

بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ولدينا: العبارة المركبة للدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$هي: $z'=e^{\frac{\pi}{4}i}.z$

$z_{A'}=e^{\frac{\pi}{4}i}.z_A=e^{\frac{\pi}{4}i}.e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ ، $z_{B'}=e^{\frac{\pi}{4}i}.z_B=e^{\frac{\pi}{4}i}.e^{-\frac{\pi}{4}i}=e^{0i}=1$ و $z_{C'}=e^{\frac{\pi}{4}i}.z_C=e^{\frac{\pi}{4}i}.2Re(z_A)=1+i$

ج-تبيّان أن الرباعي $OA'C'B'$مربع.

القطران $[OC']$ و $[A'B']$ متعامدان ومتقايسان ومتناصفان لأن:

$\frac{z_O+z_{C'}}{2}=\frac{z_{A'}+z_{B'}}{2}=\frac{1+i}{2}$ و $\overrightarrow{A'B'}(1;-1).\overrightarrow{OC'}(1;1)=0$ و $A'B'=OC'=\sqrt{2}$

ومنه الرباعي $OA'C'B'$ مربعا.

3- أ)تبيّان أن (Δ) هو محور الفواصل.

لدينا: (Δ)هو مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$

$|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافئ $MA=MB$ ومعناه ان (Δ) هو حامل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

وبمأن العددان z_A و z_B مترافقان ومنه (Δ) هو محور الفواصل.

ب)تبيان ان حلي المعادلة: $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان

لدينا: $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ ومنه: $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|^2=1$ وتكافئ $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$ وتكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$

وحسب الجواب السابق أن صور العدد المركب z هي أعداد حقيقية.

ومنه حلي المعادلة: $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$.

التمرين67: دورة 2012 م2

1) حل المعادلة التالية: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

لدينا: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ تكافئ $(z^2+4)=0$ أو $(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

حل المعادلة $(z^2+4)=0$

$(z^2+4)=0$ تكافئ $z^2=-4=(2i)^2$ ومنه $z=2i$ أو $z=-2i$.

حل المعادلة $(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ تكافئ $(z-\sqrt{3})^2=-1$ أي $z=\sqrt{3}+i$ أو $z=\sqrt{3}-i$

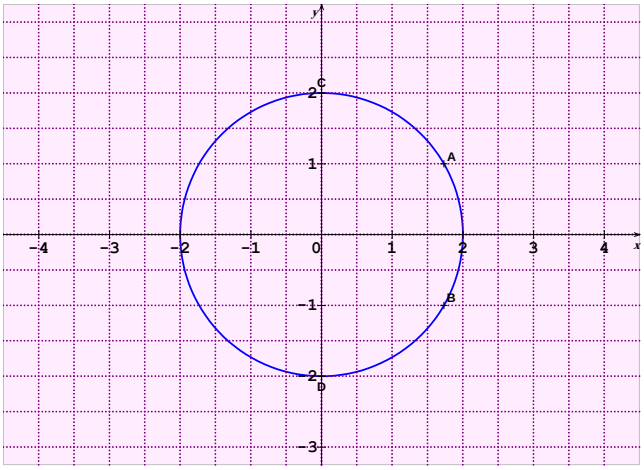
ومنه حلول المعادلة هي: $\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;2i;-2i\}$.

2- تبيّان أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) و تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=2$

ومنه النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r=2$.

إنشاء النقط A، B، C و D



3- أ-تبيّان أن $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{(-\frac{\pi}{3})i}$

لدينا: النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة لـ O ومنه: $z_E = -z_B$

$$\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{2\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i - \frac{2\pi}{3}i} = e^{(-\frac{\pi}{3}i)}.$$

ب-تبيّان أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C و تعيين زاويته.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{(-\frac{\pi}{3})i}$ والتي تكافئ $z_A - z_C = e^{(-\frac{\pi}{3})i}(z_E - z_C)$....(*)

العبارة (*) تعني أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

جـ-استنتاج طبيعة المثلث AEC.

من الجواب السابق لدينا: النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ومنه: قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})$ يساوي $-\frac{\pi}{3}$ و $CE = CA$

نستنتج ان المثلث AEC متقايس الأضلاع.

د-تعيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة

نضع: $S = RoH$ ومنه S هو تركيب الدوران $R(C;-\frac{\pi}{3})$ متبوع بالتحاكي $H(O;2)$

ومنه: S هو تشابه مباشر زاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ونسبته $k = 2$

لتعيين مركز التشابه المباشر S نكتب العبارة المركبة له:

لدينا: العبارة المركبة للدوران R هي: $z' = e^{-\frac{\pi}{3}i}z + (1 - e^{-\frac{\pi}{3}i})z_C$

والعبارة المركبة للتحاكي H هي: $z' = 2z$

$$S(z)=RoH(z)=R\left[H(z)\right]=R(2z)=2e^{-\frac{\pi}{3}i}z+(1-e^{-\frac{\pi}{3}i})z_C$$

ومنه لاحقة المركز ω للتشابه المباشر هي: $z_\omega=\dfrac{(1-e^{-\frac{\pi}{3}i})z_C}{1-2e^{-\frac{\pi}{3}i}}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}i}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-i$

استنتاج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH .

صورة (γ) بالتحويل S هي الدائرة ذات المركز ω' حيث:

$z_{\omega'}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}z_o+(1-e^{-\frac{\pi}{3}i})z_C=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-2i)=\sqrt{3}-i$ ونصف القطر $r'=2r=4$ ونصف القطر

التمرين68: دورة 2011 م1

1) كتابة على الشكل الاسي الاعداد المركبة : : z_A ، z_B و z_C

لدينا: $z_A=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و $z_B=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ و $z_C=\sqrt{3}.\overline{z_A}=\sqrt{6}e^{\frac{\pi}{4}i}$

2-أ) حساب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ثم تفسير النتائج المحصل عليها

لدينا: $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{2(-1+i)}{(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{-2(1+i)\left[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)\right]}{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

تفسير النتيجة هندسيا

لدينا: $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ معناه $\begin{cases}\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}\dfrac{AB}{AC}=1\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

ب) تحديد طبيعة المثلث ABC

من الجواب السابق لدينا: $\begin{cases}\dfrac{AB}{AC}=1\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ ومعناه ان المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) تعيين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ACBD معينا.

الرباعي ACBD معينا معناه $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$ ومعناه $z_D-z_B=z_A-z_C$ أي $z_D=-z_C=-\sqrt{3}(1+i)$

4- أ) تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

العبارة المركبة لتحويل T هي: $z'=(-1+i)z+1-3i$

بماأن $|-1+i|=\sqrt{2}\neq 1$ فإن التحويل T تشابه مباشر

العناصر المميزة هي: النسبة هي $k=|-1+i|=\sqrt{2}$ والزاوية هي $\theta=\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$

والمركز هو ω ذو الاحقة: $z_\omega=\frac{1-3i}{2-i}=1-i=z_A$

ب)استنتاج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة.

نضع: $S=ToT$ ومنه S هو تركيب التشابه المباشر $T(A;\sqrt{2};\frac{3\pi}{4})$ مع نفسه

ومنه :S هو تشابه مباشر زاويته $\theta'=2\theta=\frac{3\pi}{2}$ ونسبته $k'=k^2=2$ ومركزه A.

التمرين69: دورة 2011 م2

1-أ) التحقق أن 3 حل للمعادلة (E) وتعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c

لدينا:3 جذرا للمعادلة (E) لأن: $3^3-3.3^2+3.3-9=0$.

لدينا: $z^3-3z^2+3z-9=0$ تكافئ $z^2(z-3)+3(z-3)=0$ وتكافئ $(z-3)(z^2+3)=0...(1)$

ولدينا أيضا: $z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)....(2)$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و(2) نستنتج أن: $a=1$ و $b=0$ و $c=3$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

لحل المعادلة (E) نستعمل العلاقة (1)

$(z-3)(z^2+3)=0$ تكافئ $z=3$ أو $z^2=-3$ أي $z=\sqrt{3}i$ أو $z=-\sqrt{3}i$

وعليه حلول المعادلة (E) هي: $\{3;\sqrt{3}i;-\sqrt{3}i\}$

3-تبيان أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\sqrt{3}i-3}{-\sqrt{3}i-3}=\frac{(\sqrt{3}i-3)(\sqrt{3}i-3)}{12}=\frac{6-6\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1.e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ومنه: $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع

3-تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ هي: $z' = e^{\frac{\pi}{3}i}z$

وعليه : $z_E = e^{\frac{\pi}{3}i}z_D = e^{\frac{\pi}{3}i}.2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3})i} = 2e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\sqrt{3}-i$

4- أ) حساب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتاج أن المستقيمين (OE) و(OF) متعامدان

لدينا: $\frac{z_F}{z_E} = \frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{i(-\sqrt{3}-i)}{-\sqrt{3}-i} = i$

لدينا: $\frac{z_F}{z_E} = i$ تكافئ $\frac{z_F - z_O}{z_E - z_O} = i$ وتكافئ $\arg\left(\frac{z_F - z_O}{z_E - z_O}\right) = \frac{\pi}{2}$

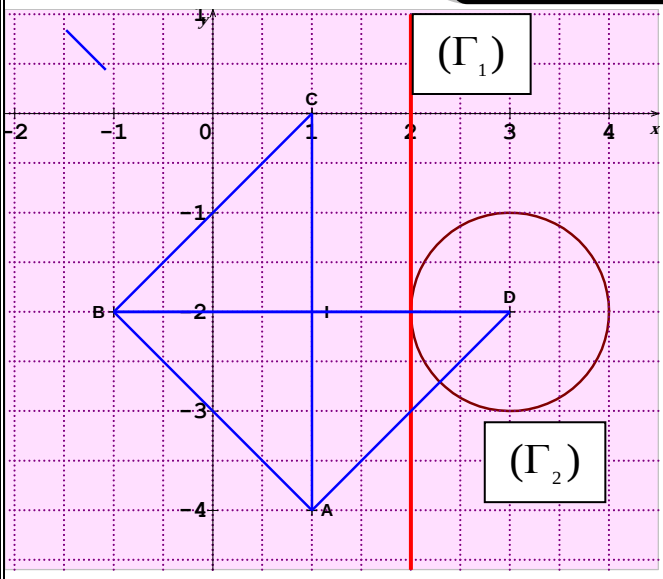
ومعناه المستقيمين (OE) و(OF) متعامدان

ب)تعيين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون OEGF مربعا.

الرباعي OEGF مربعا معناه $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{GF}$ ومعناه $z_E - z_O = z_F - z_G$

ومنه $z_G = z_F - z_E = 1-\sqrt{3}i+\sqrt{3}+i = (1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$

التمرين70: دورة 2010 م2



1-أ)تعليم النقط A، B و I

ب)كتابة z على الشكل الجبري

لدينا: $z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{2i}{2} = i$

جـ)تعيين نوع المثلث IAB.

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = i$

وتكافئ $|z| = 1$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

وتكافئ $AI = IB$ و $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه المثلث IAB قائم في I ومتقايس الساقين

د) حساب اللاحقة z_C للنقطة C.

لدينا: C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2

ومنه: $z_C = 2z_I + (1-2)z_A$ أي $z_C = 2(1-2i) + (-1)(1-4i) = 1$

هـ) حساب اللاحقة z_D للنقطة D

لدينا: D مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

ومنه: $z_D = z_A - z_B + z_C = 1-4i+1+2i+1 = 3-2i$

و) تبيّان أن ABCD مربع.

الرباعي ABCD مربعا لأن : القطران [AC] و[BD]

1) لهما نفس المنتصف I

2) متعامدان لأن : $\overrightarrow{AC}(0;-4).\overrightarrow{BD}(4;0) = 0.4 + (-4).0 = 0$.

3)متقيسان لأن: $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$ و $\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

2.تعيين وأنشئ المجموعة (Γ_1)

لدينا: (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $2\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| ...(1)$

لدينا: D مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ ومنه $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$

I منتصف القطعة [AC] ومنه $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

وعليه (1) تكافئ $2\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$ وتكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|$

ومنه مجموعة النقط (Γ_1) هي حامل محور القطعة [DI]

3.تعيين وأنشئ المجموعة (Γ_2)

لدينا: (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 1 ....(2)$

لدينا: (2) تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = 1$

ومنه مجموعة النقط (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 1