دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

I- دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

1- أسئلة نظرية وتعريفات:

* تعريف السقوط الشاقولي:

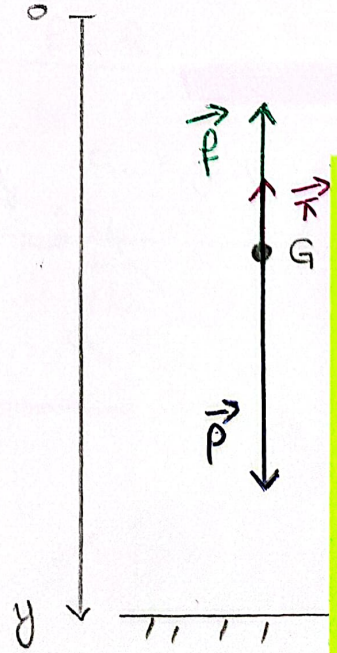
هو سقوط الجسم شاقوليا دون سرعة ابتدائية ($v_0 = 0$) نحو الأسفل، حيث قوة الاحتكاك $\vec{f}$ مع الهواء غير مهملة.

* مميزاته:
  - متجانس.
  - منتظم الشكل.
  - انسيابي.

* تستعين في دراسة السقوط الشاقولي:

المرجع السطحي الأرضي وتعتبره غاليليا.

* القوى المؤثرة على الجسم:



- قوة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ تكون موجهة دائما نحو الأعلى.
- قوة الاحتكاك مع الهواء $\vec{f}$ تكون دائما عكس جهة الحركة.
(معدومة).

سرعة تتعلق بكتلة كلما كانت كتلة أكبر كلما كانت سرعة أكبر

* قوة الثقل $\vec{P}$ =

$\|\vec{P}\| = m \cdot \|\vec{g}\|$

* عبارتها الشعاعية:
* شدتها = (عند دخال طويلة)

$P = m \cdot g \cdot (9{,}8\ m/s^2)$ (N) (kg)

* قوة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ =

$\|\vec{\pi}\| = \rho_{air} \cdot V_s \cdot \|\vec{g}\|$

* عبارتها الشعاعية =
* شدتها

$\pi = \rho_{air} \cdot V_s \cdot g\ (9{,}8\ m/s^2)$ (N) (m^3) $(1{,}3\ kg/m^3)$

* قوة الاحتكاك مع الهواء $\vec{f}$ = تعطى

* عبارتها الشعاعية =

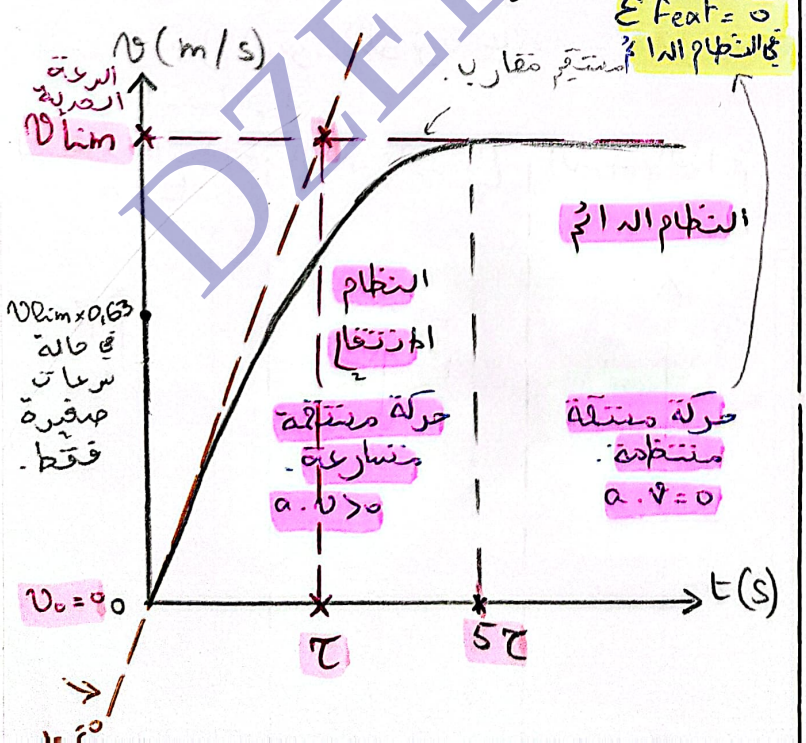
$\begin{cases} \|\vec{f}\| = -k \cdot \|\vec{v}\| & \text{سرعات صغيرة} \\ \|\vec{f}\| = -k \cdot v \cdot \|\vec{v}\| & \text{سرعات كبيرة} \end{cases}$

* شدتها =

ثابت احتكاك

$\begin{cases} f = k \cdot v & \text{سرعات صغيرة} \\ f = k \cdot v^2 & \text{سرعات كبيرة} \end{cases}$ (N) (m/s) $(m/s)^2$

2- تطور بيان السرعة $v = f(t)$ خلال السقوط الشاقولي:



صيغة الدالة قهيرة أمام دوران الأرض حول ذاتها.

DZEDUCATIVE.COM

- من بيان السرعة يمكننا استخراج:

- v_{lim}.

- ثابت الزمن τ (فاصلة تقاطع المماس مع الخط المقارب).

- التسارع a في كل لحظة t نحسب الميل $a = \frac{dv}{dt}|_{t=t}$.

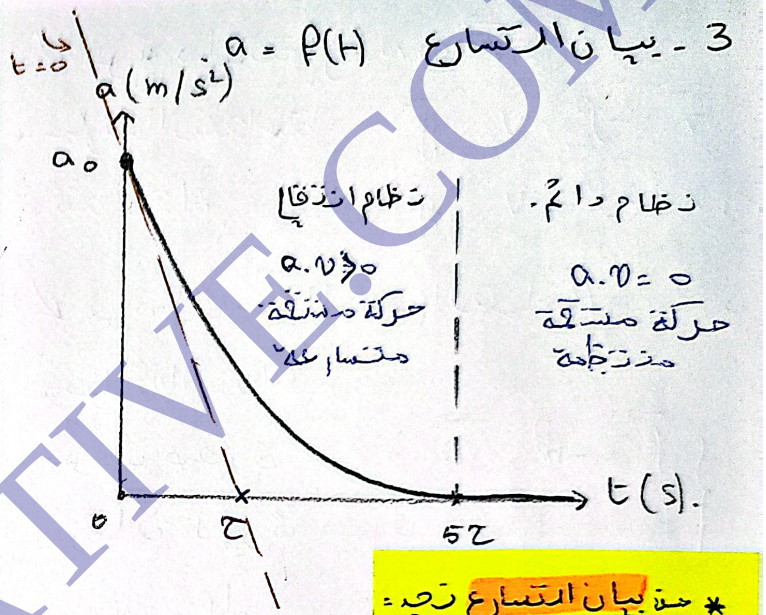
- a_0 التسارع عند $t=0$ (لحظة التلامس) $a_0 = \frac{v_{lim}-0}{\tau-0} = a_0 = \frac{v_{lim}}{\tau}$ (m/s^2)

- a_0 التسارع عند $t=0$ في نظام انزقاقي.

- في حالة سرعات صغيرة: $\tau(s) = \frac{m(kg)}{k(kg/s)}$ ثابتة الاحتكاك مع الهواء

- يمكننا إيجاد τ من البيان في حالة سرعات صغيرة: $= v_{lim} \times 0{,}63$ ثم بالاسقاط نجد τ.

3 - بيان التسارع $a = f(v)$



← تطور التسارع بدلالة السرعة $a = f(v)$

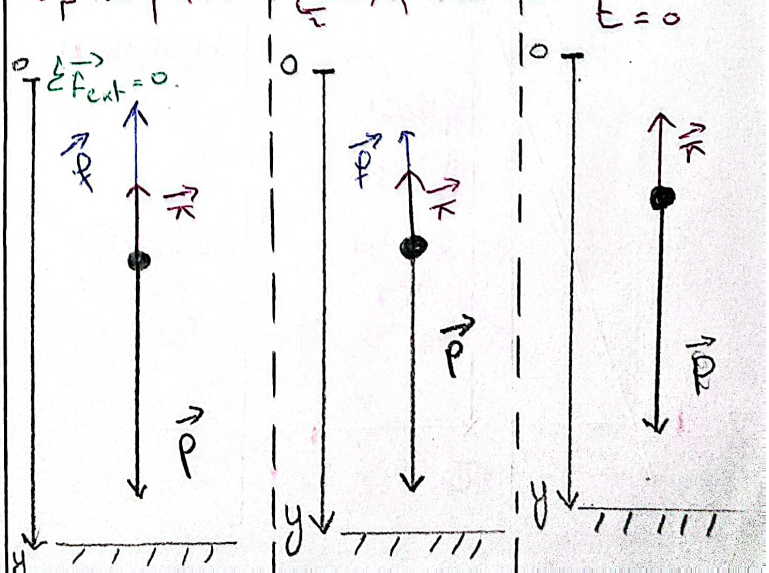
يمثل ميل المماس $a = \frac{dv}{dt}|_{t=t}$ مع مرور الزمن ظ أ يتعدم

* من بيان التسارع نجد:
- التسارع الابتدائي a_0.
- ثابت الزمن τ حيث.
- التسارع النهائي:
$a_{lim} = \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$

4 - تمثيل القوى المؤثرة على الجسم خلال السقوط الشاقولي:

لحظة الانطلاق $t=0$

النظام الانزقاقي | النظام الدائم:



5 - إيجاد عبارة شدة قوة دافعة أرخميدس بتطبيق القانون (II) لنيوتن a

- لحظة الانطلاق $t=0$.

$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{\pi} = m.\vec{a}$

بالاسقاط على محور الحركة (oy):

$\Rightarrow P - \pi = m.a_0$

$\Rightarrow \pi = P - m.a_0$

$\Rightarrow \pi = m.g - m.a_0$

$\Rightarrow \pi = m(g - a_0)$.

- النظام الدائم:

$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m.\vec{a}$

بالاسقاط على محور الحركة (oy):

$\Rightarrow P - \pi - f = m.a_{lim}$

$\Rightarrow P - \pi - f = 0$

$\Rightarrow \pi = P - f$

$\Rightarrow \pi = m.g - f$

$\pi = m.g - k.v_{lim}$.

$a = \frac{dv_{lim}}{dt}$ ثابت في النظام الدائم

- $P = m.g$ (ثابت).
- $\pi = \rho.V.g$ (ثابت).
- $f = k.v$ (متغير).

$t=0 \rightarrow v_0 = 0 \rightarrow f = 0$ نهمل قوة

$t = v = v_{lim} \rightarrow f = k.v_{lim}$ نهمل قوة

$t_p : v = v_{lim} \rightarrow f = k.v_{lim}$ نهمل قوة

$\sum \vec{F}_{ext} = 0$

3 - $(\vec{P} + \vec{\pi}) = 0$

$\rightarrow P - (f + \pi) = 0$

DZEDUCATIVE.COM

ب) المعادلة التفاضلية للسرعة v :

عالة السرعات	السرعات الصغيرة: $f = k.v$	السرعات الكبيرة: $f = k.v^2$
عدم اهمال π	$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g\left(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_s}\right)$	$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g\left(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_s}\right)$
اهمال π	$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$	$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g$

ج- عبارة السرعة الحدية v_{lim}.

حالة السرعات	السرعات الصغيرة: $f = k.v$	السرعات الكبيرة: $f = k.v^2$
عدم اهمال دافعة أرخيمدس	$v_{lim} = \frac{m.g}{k}\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$	$v_{lim} = \sqrt{\frac{m.g}{k}.\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)}$
اهمال دافعة أرخيمدس	$v_{lim} = \frac{m.g}{k}$	$v_{lim} = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$

3- عبارات التسارع الابتدائي a_0 :

حالة السرعات	السرعات الصغيرة: $f = k.v$	السرعات الكبيرة: $f = k.v$
عدم اهمال دافعة π	$a_0 = g.\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$	
اهمال π	$a_0 = g.$	

البرهان عليهم :

أ) المعادلة التفاضلية للسرعة v :

المجملة المدروسة : جسم (S).

المرجع : سطحي أرضي نعتبره غاليلي.

القوى المؤثرة : $\vec{f}$; $\vec{\pi}$; $\vec{P}$.

بتطبيق القانون (II) لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\pi} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على المحور (oy) :

$$P - f - \pi = m.a$$

$$m.g - k.v - \rho_a.V.g = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\left(m.g - \rho_a.V.g = m.\frac{dv}{dt} + k.v\right) \times \frac{1}{m}$$

$$g - \rho_a.\frac{V}{m}.g = \frac{dv}{dt} + \frac{k.v}{m}$$

$$\rho_s = \frac{m}{V} \quad \leftarrow \quad \rho_s = \frac{m}{V}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g - \frac{\rho_a.g}{\rho_s}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right) \quad \cdots (1)$$

لإيجاد v_{lim} :

لدينا في النظام الدائم $v = v_{lim}$ وبالاعتماد على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dv_{lim}}{dt} + \frac{k}{m}.v_{lim} = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

$$v_{lim} = g.\frac{m}{k}\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

be careful ⚠ :

$$\frac{dv_{lim}}{dt} = 0$$

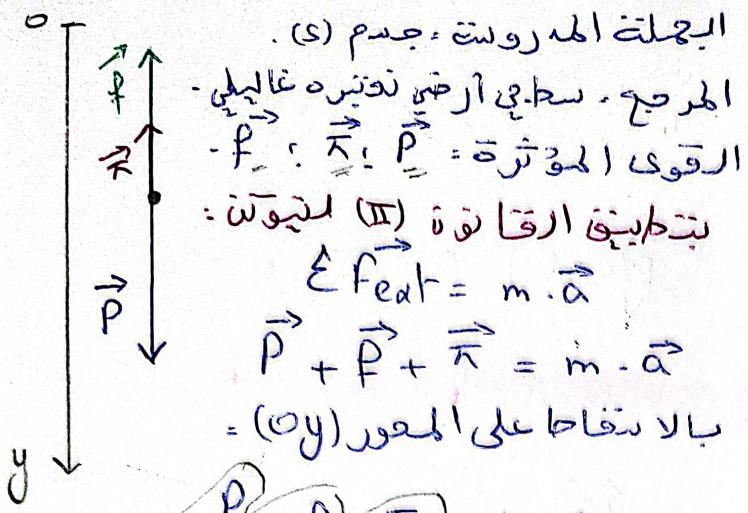
لأن :

التسارع في النظام الدائم ثابت

بالتالي مشتقة سرعة تروح بـ 0.

$$f = k.v \quad : \text{ج-1}$$

π غير معطاة.



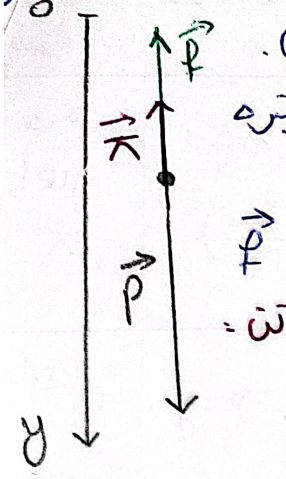
$$P - f - \pi = m.a.$$

$$m.g - k.v - \rho_a.V.g = m.\frac{dv}{dt}$$

DZEDUCATIVE.COM

$a_0 = g$.

الح 3 : π موجودة + $f = k.v^2$



البحلة المدروسة = جسم (S).

المرجع = سطحي أرضي نعتبره غاليلي.

القوى المؤثرة : $\vec{P}$; $\vec{\pi}$; $\vec{f}$

بتطبيق القانون II لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\pi} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على المحور (oy) :

$$P - f - \pi = m.a$$

$$m.g - k.v^2 - \rho_a.V.g = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\left(m.g - \rho_a.V.g = m.\frac{dv}{dt} + k.v^2\right) \times \frac{1}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g - \frac{\rho_a}{\rho_s}.g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

لإيجاد v_{lim} :

في النظام الدائم $v = v_{lim}$ وبالاعتماد على المعادلة التفاضلية للسرعة نجد :

$$\frac{dv_{lim}}{dt} + \frac{k}{m}.v_{lim}^2 = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

$$v_{lim}^2 = \frac{g.m}{k}\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{g.m}{k}\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)}$$

لإيجاد a_0 :

عند $t = 0$ وبالاعتماد على المعادلة التفاضلية نجد :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}}_{a_0} + \frac{k}{m}.v^2(t=0) = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

$$a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right).$$

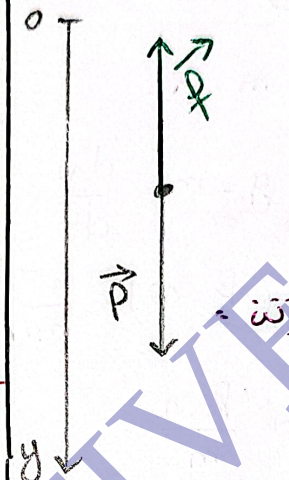
لإيجاد a_0 :

عند $t = 0$ فإن : $v(t=0) = 0$

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}}_{a_0} + \frac{k}{m}.v(t=0) = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

$$a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}\right)$$

الح 2 : π مهملة + $f = k.v$ (موجودة)



البحلة المدروسة = جسم (S)

المرجع = سطحي أرضي نعتبره غاليلي.

القوى : $\vec{P}$; $\vec{f}$

بتطبيق القانون (II) لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على محور (oy) :

$$P - f = m.a$$

$$m.g - k.v = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\left(m.g = m.\frac{dv}{dt} + k.v\right) \times \frac{1}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g.$$

لإيجاد v_{lim} :

لما يبقى النظام الدائم $v = v_{lim}$ والاعتماد على المعادلة التفاضلية نجد :

$$\frac{dv_{lim}}{dt} + \frac{k}{m}.v_{lim} = g.$$

$$v_{lim} = \frac{g.m}{k}.$$

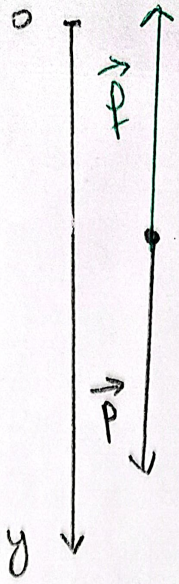
لإيجاد a_0 :

عند $t = 0$ وبالاعتماد على المعادلة التفاضلية.

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}}_{a_0} + \frac{k}{m}.v(t=0) = g.$$

DZEDUCATIVE.COM

$f = k.v^2$: 4 ق (غير موجودة) π



المجموعة المدروسة: جسم (S).

المرجع: سطحي أرضي نعتبره غاليلي.

القوى المؤثرة: $\vec{P}$ ؛ $\vec{f}$.

بتطبيق القانون II لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور (oy):

$$P - f = m.a.$$

$$m.g - k.v^2 = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\left(m.g = m.\frac{dv}{dt} + k.v^2\right) \times \frac{1}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g.$$

إيجاد v_{lim}:

في النظام الدائم $v = v_{lim}$ والاعتماد على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dv_{lim}}{dt} + \frac{k}{m}.v_{lim}^2 = g.$$

($\frac{dv_{lim}}{dt} \to 0$)

$$v_{lim}^2 = g.\frac{m}{k}.$$

$$v_{lim} = \sqrt{g.\frac{m}{k}}$$

إيجاد a_0:

عند $t=0$ والاعتماد على المعادلة التفاضلية:

$$\underbrace{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}}_{a_0} + \frac{k}{m}.v^2(t=0) = g.$$

($v(t=0) \to 0$)

$$a_0 = g.$$

DZEDUCATIVE.COM

يمكن إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ في :

الحالة 1 : $P \gg\gg \pi$

E_x : قوة ثقل

أحسب النسبة : $\frac{P}{\pi}$ دافعة أرخميدس

$$\frac{P}{\pi} = \frac{m.g}{\rho_a.V.g} = \frac{\rho_s}{\rho_a} = 713,2$$

$$P = 713,2.\pi$$

ومنه : $P \gg\gg \pi$

ومنه : دافعة أرخميدس π مهملة.

الحالة 2 : $a_0 = g$ تسارع الجملة ثابت

E_x :

$a_0 = g = 9,8 m/s^2 \Rightarrow$ π مهملة

$a_0 \neq g \neq 9,8 m/s^2 \Rightarrow$ π غير مهملة

DZEDUCATIVE.COM