ملخص: المتتاليات

المتتاليات العددية

عبارة الحد العام:

$U_n = f(n)$

Exemple:
- $U_n = 2n+3$
- $U_n = \sqrt{n} + 2$
- $U_n = e^n + 2$
- $U_n = n^2 + 2n - 2$

العلاقة التراجعية

$U_{n+1} = f(U_n)$

Exemple:
- $U_{n+1} = 2U_n + 3$
- $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} - 3$
- $U_{n+1} = e^{U_n} + 2$
- $U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n - 2$

المتتالية الحسابية:

2 ↷ 4 ↷ 6 ↷ 8 ↷ 10
+2 +2 +2 +2
عبارة الحد العام.

$U_n = U_p + (n-p)r$ ← الأساس
U_p ← الحد الأول
$(n-p)$ ← دليل الحد الأول

المتتالية الهندسية:

2 ↷ 4 ↷ 8 ↷ 16 ↷ 32
×2 ×2 ×2 ×2
عبارة الحد العام

$U_n = U_p \times q^{n-p}$
U_p ← الحد الأول
q ← الأساس
$n-p$ ← دليل الحد الأول.

المجاميع:

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$

مجموع حدود متتالية حسابية

$S = \left(\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\right) \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$

مجموع حدود متتالية هندسية

$S = \text{الحد الأول} \times \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$ ← الأساس

$q \neq 1$

!! إذا كان $q = 1$: المتتالية (U_n) هي متتالية ثابتة.

$S = (\text{الحد الأول}) \times (\text{عدد الحدود})$
عدد الحدود ← تكرار

عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1

الرتبة :

الرتبة = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1

مثال :

Ex. $\underbrace{U_2 + U_3 + \dots\dots + ?}$ الحد الذي رتبته 17.

$\Rightarrow 17 = x - 2 + 1$

$\Rightarrow 17 + 1 = x \Rightarrow x = 18$

- الحد الذي رتبته 17 هو U_{18}.

نعوض عبارة الحد العام بـ n نلقى القيمة.

Ex. $\underbrace{U_0 + U_1 + U_2 \dots\dots +}$ الحد الذي رتبته 11.

$\Rightarrow 11 = x + 0 + 1$

$\Rightarrow 11 - 1 = x \Rightarrow x = 10$

- الحد الذي رتبته 11 هو U_{10}.

قيمته هي : نعوضه في عبارة الحد العام.

$U_{10} = 32$

عبارة الحد العام هي :

$U_n = 2 + 3n$

$U_{10} = 2 + 3(10)$

$U_{10} = 32$

- اتجاه تغير المتتالية :

1b :

$U_{n+1} - U_n = 0$

- $= 0$: (U_n) متتالية ثابتة.
- < 0 : (U_n) متتالية متناقصة تماما
- > 0 : (U_n) متتالية متزايدة تماما

2b : - متتالية حدودها موجبة تماما

- يقلك برهن بالتراجع أنه مهما كان العدد الطبيعي n : $U_n > 0$ (أي حدودها موجبة تماما).

$\frac{U_{n+1}}{U_n}$

- $= 1$: (U_n) متتالية ثابتة
- < 1 : (U_n) متتالية متناقصة تماما
- > 1 : (U_n) متتالية متزايدة تماما

3b : باستعمال الدالة المرفقة.

عبارة الحد العام. $U_n = f(n)$

مثال : $U_n = 2n + 3$

الدالة المرفقة هي : $f(x) = 2x + 3$

$\Downarrow$

f و U_n لهما نفس اتجاه التغير.

علاقة تراجعية. $U_{n+1} = f(U_n)$

مثال : $U_{n+1} = 3U_n + 2$

الدالة المرفقة هي : $f(x) = 3x + 2$.

- $U_n - U_0 > 0$ ، (U_n) متزايدة تماما ، $f \nearrow$
- $U_n - U_0 < 0$ ، (U_n) متناقصة تماما.

لا يمكن الاستنتاج اتجاه تغير (U_n). $f \not\nearrow$

4b : باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع.

- برهن بالتراجع أن (U_n) متزايدة تماما معناه : $U_{n+1} > U_n$ أو $U_{n+1} - U_n > 0$ قوة أكبر من 0

- برهن بالتراجع أن (U_n) متناقصة تماما معناه : $U_{n+1} < U_n$ أو $U_{n+1} - U_n < 0$ قوة أقل من 0

- تقارب متتالية :

ب 1 :

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R}$ عبارة الحد العام تكون كتابة

فإن (U_n) متتالية متقاربة

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \infty$

فإن (U_n) متتالية متباعدة.

ب 2 : خاصية التقارب :

إذا كانت U_n متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى : $(U_n \leqslant M)$

M مستقل على n .

فإن (U_n) متتالية متقاربة.

إذا كانت (U_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل : $(U_n \geqslant M)$

M مستقل على n :

فإن (U_n) متتالية متقاربة .

- تبيان أن متتالية هندسية :

ثابتة $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ أو : $\boxed{U_{n+1} = U_n \times q}$

تبيان أن متتالية حسابية :

$U_{n+1} - U_n = r$. $U_{n+1} = U_n + r$

الوسط الحسابي :

a ، b ، c ثلاث حدود متعاقبة لمتتالية حسابية :

$a + c = 2b$

الوسط الهندسي :

a ، b ، c ثلاث حدود متعاقبة لمتتالية هندسية :

$a \times c = b^2$