الدوال الاصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I.
نقول ان دالة F هي دالة اصلية للدالة f على المجال I اذا تحقق الشرطان

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- $F'(x) = f(x)$

خواص

كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دوال اصلية على I

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
اذا كانت F دالة اصلية للدالة F على المجال I فان :
جميع الدوال الاصلية للدالة f معرفة على I بما يلي : $(k \in \mathbb{R})\ x \mapsto F(x) + k$

كل دالة f مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.
توجد دالة اصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$ تقبل دوال اصلية على I

دوال اصلية لـ $f+g$ و kf

- اذا كانت F و G دالتين اصليتين على الترتيب لـ f و g على مجال I فان $F+G$ دالة اصلية لـ $f+g$ على I
- اذا كانت F دالة اصلية للدالة f على مجال I فان kF دالة اصلية للدالة kf على I $(k \in \mathbb{R})$

الدوال الاصلية لدوال مالوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مالوفة.
الدوال الاصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا

$f(x) =$	$F(x) =$	$I =$
a (عدد حقيقي)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$(n \in \mathbb{N}^*)\ x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0;+\infty[$ او $]-\infty;0[$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0;+\infty[$ او $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0;+\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$(b \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^*)\ e^{ax+b}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0;+\infty[$
$(a \in \mathbb{R})\ \ln(x-a)$	$(x-a)\ln(x-a) - x + c$	$]a;+\infty[$

الدوال الاصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الاصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$(n \in \mathbb{N}^*)\ u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ \frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من اجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من اجل كل x من I ، $u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$	$u(x) \neq 0$
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية	حلول المعادلة
$y' = ay$	$y = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$	$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$
$y' = f(x)$	$y = F(x) + c$
$y'' = f'(x)$	$y = F(x) + c_1x + c_2$
$y'' = -\omega^2 y$	$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$

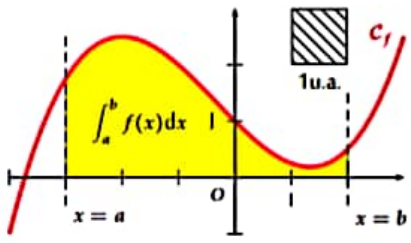
الحساب التكاملي

تعريف

لتكن f دالة مستمرة على مجال I و F دالة اصلية للدالة f على المجال I.
تكامل الدالة f من a الى b هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

الدالة الاصلية و مساحة حيز تحت منحن



- f دالة مستمرة و موجبة تماما على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد و متجانس و F دالة اصلية لـ f على I. مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$
- وحدة المساحة هي مساحة المستطيل ذو الضلعين OI و OJ
- اذا كانت f سالبة فان مساحة الحيز هي $-\int_a^b f(x)dx$

الدالة الاصلية لدالة و التي تنعدم من اجل قيمة

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.
الدالة الاصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من اجل a هي الدالة $F : \mapsto \int_a^x f(t)dt$

خواص التكامل

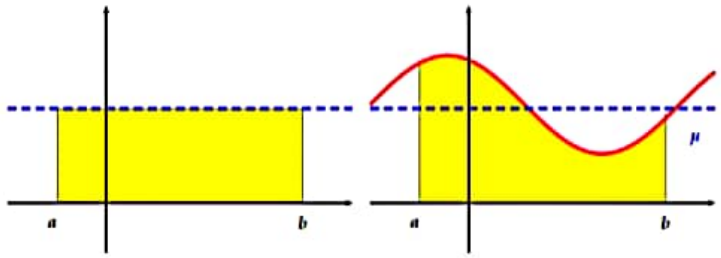
f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a,b]$

التكامل المحدود	$\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)]$
التكامل الغير محدود	$\int f(x)dx = F(x) + C$
علاقة شال	$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
الخطية	$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
المكاملة بالتجزئة	$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$
المقارنة	اذا كان من اجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x) \geq g(x)$ فان $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

القيمة المتوسطة على مجال

f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$ هي العدد الحقيقي : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$



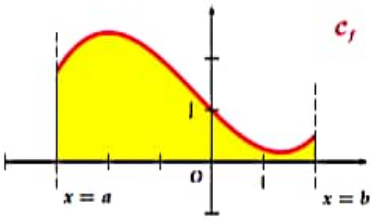
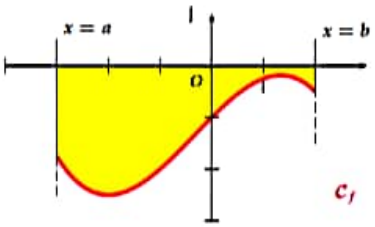
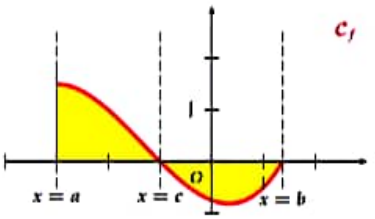
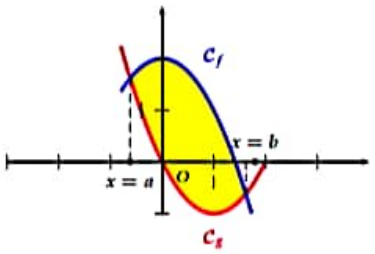
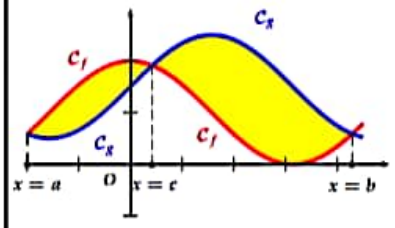
حصر القيمة المتوسطة

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$

اذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من اجل كل x من $[a;b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ فان :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

حساب المساحات و الحجوم

المساحات S	التمثيل البياني لها
$S = \int_a^b f(x)dx$	
$S = \int_a^b -f(x)dx$	
$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$	
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$	
$S = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$	

ملاحظة هامة

كل المساحات يجب ان تضرب في الوحدة ua حيث $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$