ملخص في:
الدوال العددية.

مكتسبات:

المتطابقات الشهيرة:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

الحساب في $\mathbb{R}$:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$.
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

خواص الجذور:

- $\sqrt{a^2} = |a|$.
- $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

حذار: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

خواص القوى:

- $a^n . a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^n \times b^n = (a.b)^n$

ex:
- $2^3 . 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
- $\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1}$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.
- $(2^2)^4 = 2^{3.4} = 2^{12}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$
- $(3 \times 2)^2 = 3^2 . 2^2$.

القيمة المطلقة:

- $\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$ $\quad |-x| = x$

- $|x| \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ (الموجب)} \\ -x & x \leq 0 \text{ (السالب)} \end{cases}$

- $|f(x)| \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \text{ (فوق محور الفواصل)} \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \text{ (تحت محور الفواصل)} \end{cases}$

- $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\quad |x.y| = |x| . |y|$.
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $y \neq 0$.
- $|x+a| = \begin{cases} x+a & ; x \geq -a \\ -x-a & x \leq -a \end{cases}$.
- $|x-a| = \begin{cases} x-a & ; x \geq a \\ -x+a & ; x \leq a \end{cases}$

تغيرات الدالة ودراستها في:
- الضرب في عدد سالب.
- المقلوب.
- تربيع طرفين سالبين.
- القيمة المطلقة لطرف سالب.

I. دراسة إشارة كثير حدود من الدرجة 1 : $(ax+b)$

$(a \neq 0)$

نحل المعادلة $ax+b=0$ إذن : $ax=-b$ ومنه : $x=\frac{-b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	تفس إشارة a		

II. دراسة إشارة كثير حدود من الدرجة 2 : (ax^2+bx+c)

$(a \neq 0)$.

نحسب بالمميز $\Delta = b^2-4ac$. ومنه :

إذا :	دراسة الإشارة	حلول المعادلة	التحليل.
$\Delta > 0$	x : $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، $+\infty$ ax^2+bx+c : تفس إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، تفس إشارة a تعتاع.	المعادلة تقبل حلان متمايزان $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$=a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$	x : $-\infty$ ، x_1 ، $+\infty$ ax^2+bx+c : تفس إشارة a ، 0 ، تفس إشارة a .	المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x_1 = \frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
$\Delta < 0$	x : $-\infty$ ، $+\infty$ ax^2+bx+c : تفس إشارة a	المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.	لا تقبل تحليلا

جذر كثير حدود.

جذر = حل.

$f(\text{عدد}) = 0$

ex = BAC 2014 Sc.

$f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

حساب $f(1)$ =

$f(1) = \frac{(1)^3-2(1)+1}{2(1)^2-2(1)+1} = 0$

ومنه العدد 1 جذر لكثير حدود f.

$f(1)=0$

الأولويات على العمليات :

1 - الأقواس.

2 - الأس

3 - الضرب ؛ القسمة.

4 - الجمع ؛ الطرح.

تحليل كثير حدود :

كثير حدود $= f(x)$

(عدد) جذر لكثير حدود

$f(x) = (x - \text{جذر})(ax^2+bx+c)$

كثير حدود من الدرجة II

كثير حدود من الدرجة III

طرق تحليل كثير حدود.

الطريقة الأولى:

ex: $f(x) = 2x^3 - x^2 - 14x + 16$

2 هو جذر لـ f :

ومنه:

$2x^3 - x^2 - 14x + 16 \Leftarrow$

$(x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

جذر — دالة من الدرجة الثانية

بالنشر:

$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3 + x^2(b - 2a) + x(c - 2b) - 2c \Leftarrow$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 2. \\ b - 2a = -1 \rightarrow b - 2(2) = -1 \rightarrow b = 3 \\ c - 2b = -14 \rightarrow c - 2(3) = -14 \rightarrow c = -8 \end{cases}$$

ومنه:

إذا: $c = -8$; $b = 3$; $a = 2$

$(x - 2)(2x^2 + 3x - 8) = f(x)$.

القسمة الإقليدية:

$2x^3 - x^2 - 14x + 16$	$x - 2$
$-2x^3 + 4x^2$	$2x^2 + 3x - 8$
$0\ 3x^2 - 14x + 16$	
$-3x^2 + 6x$	
$0\ -8x + 16$	
$+8x + 16$	
$0\ \ 0$	

ومنه:

$2x^3 - x^2 - 14x + 16 =$

$(x - 2)(2x^2 + 3x - 8)$.

خوارزمية HORNER

نذكر بأن: Δ لا تشتقل في RAC

$f(x) = 2x^3 - x^2 - 14x + 16$

2 هو جذر.

تحليل: $2x^3 - x^2 - 14x + 16 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

	x^3	x^2	x	عدد
	2	-1	-14	+16
جذر	2	+	+	+
	0	4	6	-16
	=	=	=	=
	2	3	-8	0
	a	b	c	

$a = 2$; $b = 3$; $c = -8$ = ومنه

مجموعة تعريف دالة :

كيم لي نقرو هو في دالة و نحطو ياصدر نقولو

الصور ← $f(x) = g(x)$ ← سوابق

output. input

- $3 \xrightarrow{f} f(x) = 2x + 3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$.

$\xrightarrow{g}$

- 0 ما عندو $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ * $\frac{1}{0}$ قيمة غير معرفة

- دالة تتضمن كسور : نحل معادلة.

مقام $\neq 0$ $\quad$ ex $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ $\neq 0$

$2x + 3 \neq 0$ ومنه $2x \neq -3$ أي $x \neq \frac{-3}{2}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

- دالة تتضمن جذور نحل متراجحة.

$\sqrt{\square} \geq 0$ $\quad$ ex : $\sqrt{x+2} \geq 0$

$x + 2 \geq 0$ أي $x \geq -2$ إذن

حساب نهاية ← حساب صور.

$D_f = [-2 ; +\infty[$.

Note :

$\leqslant ; \geqslant$ ← مجال مغلق.

$< ; >$ ← مجال مفتوح.

الدالة هي علاقة تقيم بين مجالات أو أعداد.

دالة تتضمن جذور : نحل متراجحة $\sqrt{\square} \geq 0$

دالة تتضمن كسور : نحل معادلة $\frac{}{\square} \neq 0$

---

ex : $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

$\frac{x+1}{x+2} \geq 0$ و $x + 2 \neq 0$

تتقاطع

$\sqrt{x+2} \neq 0$ أو $x + 2 \geq 0$

ex : $\frac{2x+1}{\sqrt{x+2}}$

النهايات :

- معرفة تصرف الدالة بجوار $+\infty$ ؛ $-\infty$.

- معرفة تصرف الدالة بجوار الرقم المحذوفة. مجال مفتوح

الرقم المحذوفة كي نوعوضو في الدالة معناه هيتش صدر

How big is infinity?

العمليات على النهايات :

الجمع :

حذاري تعامل مع ∞ على أنها عدد ؛ بل هي حاجة كيرة بزاف.

- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $+\infty + \text{عدد} = +\infty$
- $-\infty + \text{عدد} = -\infty$
- $+\infty - \infty =$ ح.غ.ت

الضرب :

⚠ مراعاة قواعد الإشارة.

- $\infty \times \text{عدد} = \infty$
- $\infty \times \infty = \infty$
- $0 \times \infty =$ ح.غ.ت

القسمة :

- $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ $\quad$ - $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ $\quad$ - $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ ⚠ مراعاة قواعد الإشارة.
- $\frac{0}{\infty} = 0$ $\quad$ - $\frac{\infty}{0} = \infty$
- $\frac{0}{0} =$ ح.غ.ت
- $\frac{\infty}{\infty} =$ ح.غ.ت



القوى :

عدد طبيعي غير معدوم.

- $(+\infty)^n = +\infty$ ؛ ex $(+\infty)^5 = +\infty$.
- $\begin{cases} (-\infty)^{\text{عدد زوجي}} = +\infty \text{ ؛ ex} = (-\infty)^2 = +\infty. \\ (-\infty)^{\text{عدد فردي}} = -\infty \text{ ؛ ex} = (-\infty)^3 = -\infty. \end{cases}$

الجذر :

- $\sqrt{+\infty} = +\infty$

حالات عدم التعيين :

$-\infty + \infty$ / $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$ / $0 \times \infty$

Note :

نهاية الدالة ثابت هي ثابت نفسها.

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{5} = \sqrt{5}$ مستقر أو في مواجهة لصور الفواصل.

حساب النهايات من الشكل $\frac{\text{عدد}}{0}$

1- التحويض.
2- دراسة إشارة المقام.
3- تطبيق قواعد الاشارة.

ex1: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

دراسة إشارة المقام.
نبحث عن كتير حدود I.
المقام $x+1=0$ أي $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

ex2: $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$.

x^2-4x+4

دراسة إشارة المقام
كتير حدود II:

$\Delta = b^2-4ac$.

حساب Δ ثم إيجاد الحلول ....

Note:
$(\sqrt{\ })^2 - \sqrt{\ } - 1$ دائما موجبة
1- قيم كبرى $\neq$ تعطي صفر موجب.
2- قيم صغرى $\neq$ تعطي صفر سالبا.

حالات عدم التعيين:

$-\infty+\infty$

لكثير حدود
طريقة الحل:
- إخراج العامل المشترك (نهاية الحد الأكبر درجة).

نتوهمت جذور
- طريقة الحل.
1- المرافق.
2- العامل المشترك.

Ex:
$\lim_{x\to -\infty} -x^3+2x-2$
* نفس النهاية مرجعية $+\infty$
$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3}{+\infty} + \frac{2x}{-\infty} + 2$ = oups حالة عدم التعيين.

إخراج العامل المشترك:

حد أكبر درجة

$\lim_{x\to -\infty} -x^3+2x-2 = \lim_{x\to -\infty} x^3\left(-1+\frac{2x}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)$

$\lim_{x\to -\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \lim_{x\to -\infty} -x^3 = +\infty$

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $-\infty+\infty$
لكثير حدود:
إخراج العامل المشترك الحد الأكبر درجة.
(نهاية حد أكبر درجة = أكبر تأثير).

Ex:
$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ ($+\infty$ $-\infty$) = oups حالة عدم تعيين

باستعمال المرافق:

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

المرافق:
$A-B \to A+B$
$A+B \to A-B$

Ex: $\lim_{x\to +\infty} 2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$ ($+\infty$ $-\infty$) = oups.

إخراج العامل المشترك تحت جذر:

$\lim_{x\to +\infty} 2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

$\lim_{x\to +\infty} 2x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}$

$\lim_{x\to +\infty} 2x+1-\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$

$\lim_{x\to +\infty} 2x+1-|x|\times\sqrt{1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$

لما أن $x\to+\infty$ فإن: $|x|=x$

$\lim_{x\to +\infty} 2x+1-x\cdot\sqrt{1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$

$\lim_{x\to +\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}\right) = +\infty$

طريقة استعمال العامل المشترك.
1- مجموع المعاملات $\neq$ يساوي 0
2- x يؤول لـ $+\infty$.
3- عندما تكون تحت الجذر عبارة من الدرجة I، نقوم بإخراج x^2 كعامل مشترك تحت الجذر.

ممكنة استعمال المرافق عندما:
- مجموع الحدود تساوي 0

Ex: $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x+2}$ $\quad +\infty - \infty$ = oups حالة عدم التعيين

إخراج العامل المشترك:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - |x|\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

لدينا $x\to+\infty$ فإن $|x| = x$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{x}{x}\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{x}{x}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$\frac{\infty}{\infty}$

الدوال الناطقة
طريقة الحل
- إخراج العامل المشترك (نهاية الحد الأكبر من البسط والمقام)

تتضمن $\sqrt{\ }$
طريقة الحل
- المرافق
- إخراج العامل المشترك تحت الجذر

Ex: نهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{2-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{2-x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{oups.}$$

إخراج العامل المشترك.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

- إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ = $\frac{\text{دالة ناطقة}}{\text{دالة ناطقة}}$.
- إخراج العامل المشترك أعلى الأكبر درجة من البسط والمقام.
- (نهاية الحد الأكبر من بسط والمقام).

⚠ نهاية الحد الأكبر:
- دالة كثير حدود: دالة ناطقة
- عند $+\infty$ أو $-\infty$ فقط

Ex: $\lim_{x\to+\infty} 2x+1 - \sqrt{x^2+x-2}$ $\quad +\infty - \infty$ = oups: حالة عدم التعيين

المرافق: $\frac{(2x+1)+\sqrt{x^2+x-2}}{(2x+1)+\sqrt{x^2+x-2}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^2 - \left(\sqrt{x^2+x-2}\right)^2}{(2x+1)+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4+4x-x^2-x+2}{(2x+1)+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+3}{(2x+1)+\sqrt{x^2+x-2}}$$ $\frac{\infty}{\infty}$ oups

إخراج العامل المشترك تحت جذر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+3}{(2x+1)+\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+3}{(2x+1)+\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+3}{(2x+1)+|x|\times\sqrt{\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

لدينا $x\to+\infty$ فإن $|x| = x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+3}{(2x+1)+x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+3}{x\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{3x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{2+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} = \frac{3x}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$0 \times \infty$

↓

طريقة الحل :
التنشئ .

Ex :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(1+x) = oups$

$\frac{1}{x} \times \infty$

التنشئ :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$

$\frac{0}{0}$

دوال ناطقة
طريقة الحل
التحليل .
← القسمة الإقليدية
← الترتيب الطابقة
← خوارزمية هورنر .

↓

لمقام من الشكل $(x - x_0)$
طريقة الحل :
تعريف العدد المشتق
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

تتضمن $\sqrt{\ }$
طريقة الحل .
المرافق .
← ضرب وقسمة مع المرافق .
ثم الاختزال .

↓

الدوال المثلثية
طريقة الحل .
- استعمال النهايات الشهيرة -
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Ex :

$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2} = \frac{0}{0}$ oups

x^3+2x^2+x+2 هو جذر لـ -2 .

$x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(ax+bx+c)$

باستعمال القسمة الإقليدية .

$x^3+2x^2+x+2 \quad | \quad x+2$

$-x^3+2x^2 \quad | \quad x^2+1$

$0 \quad 0 \quad x+2$

$-x+2$

$0 \quad 0$

$(x^3+2x^2+x+2) = (x+2)(x^2+1)$.

x^2+x-2 هو جذر للمقام -2

- باستعمال القسمة الإقليدية :

$x^2+x-2 \quad | \quad x+2$

$-x^2+2x \quad | \quad x-1$

$-x-2$

$+x+2$

$0 \quad 0$

$(x^2+x-2) = (x+2)(x-1)$.

$= \frac{5}{-3}$

$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2+1}{x-1}$

Ex :

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$ oups.

باستعمال المرافق :

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

$= \frac{1}{2}$

Ex:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \frac{0}{0} \text{ oups.}$$

نضرب ونقسم في $\frac{3}{3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{3}{3} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

3×1

$$= 3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0} \text{ oups}$$

نخرج $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \times 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{0}{0} \text{ oups.}$$

واخرج $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك والضرب بالقيمة $\frac{3}{3}$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{3}{3}$$

$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

$\frac{3}{2} \times 1$

$$= \frac{3}{2}.$$

Ex:

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x\to x_0}}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \text{ oups.}$$

$f(x)$ c $f(x_0)$

$x - x_0$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = f'(4).$$

- لتكن الدالة: $f(x) = \sqrt{x}$ إذن:

نشتقها $\leftarrow$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ثم نعوض

ومنه: $f'(4) = \boxed{\frac{1}{4}}$

إذن:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$

تطبيقة في أي نوع من الدوال.

* استعمال طريقة العدد المشتق:

- أن تكون لنا حالة تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

- المقام من الشكل: $x - x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Ex: الدوال المثلثية:

- نهايات شهيرة:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1.$

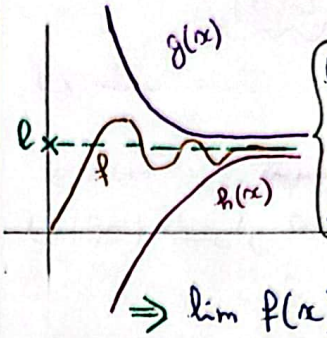
Rule:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

النهايات بالحصر والمقارنة :

I - مبرهنة الحصر :

$h \leqslant f \leqslant g$



$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a/\infty} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to a/\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$

فإن :

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a/\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Ex :

$\frac{2x-1}{3x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+1}{3x+1}$

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

- لدينا :

$\frac{2x-1}{3x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+1}{3x+1}$

و $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{2}{3} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$

إذن : باستعمال مبرهنة الحصر :

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$

⚠ تستعمل مبرهنة الحصر : إذا :

- أعطي حصر وطلب منا حساب نهايته
- حساب نهاية دوال مثلثية $\sin x$; $\cos x$ ...

Note :

تستعمل مبرهنة الحصر فقط عندما تكون نتيجة lim عدد.

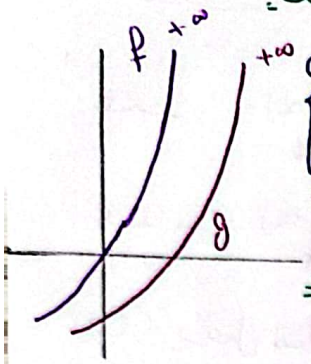
Ex :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a/\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to a/\infty} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \ell \leqslant h(x) \leqslant \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to a/\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(عدد ، عدد ، عدد)

الحصر $\lim = \underbrace{\ell}_{\text{عدد}}$

II - مبرهنة المقارنة :



$\begin{cases} f \geqslant g \nearrow +\infty \\ \lim\limits_{x \to a/\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$ ثم $\geqslant +\infty$

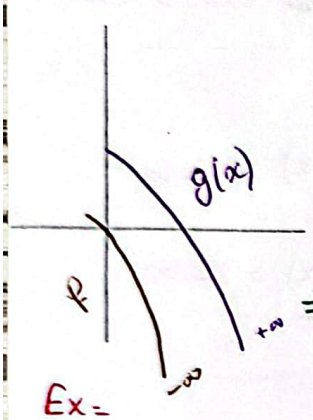
فإن :

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a/\infty} f(x) = +\infty$

Note :

$+\infty \rightarrow \geqslant$

$-\infty \rightarrow \leqslant$



$\begin{cases} f \leqslant g \\ \lim\limits_{x \to a/\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ ثم $\leqslant -\infty$

فإن :

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a/\infty} f(x) = -\infty$

Ex :

لدينا : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$

استنتاج : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

حالة أكبر وكي تكون نهاية دوال مركبة وبين نهاية دالة أكبر $+\infty$

لدينا :

$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$

لماذا : $\sqrt{x} \geqslant 0$:

$\frac{1}{2}\sqrt{x} \leqslant \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \leqslant \sqrt{x}$

لدينا :

$\frac{x\sqrt{x}}{x+1} \geqslant \frac{\sqrt{x}}{2}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$

باستعمال حساب النهاية بالمقارنة :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty$

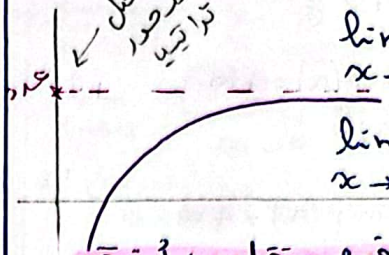
في الدوال المثلثية : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ مهمة جدا.

مبرهنة المقارنة عندما تكون نتيجة lim في حالة نهاية

المقارنة $\lim = \infty$

المستقيمات المقاربة :

1 ح

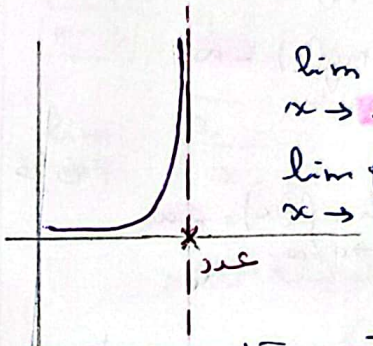


$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ عدد

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ عدد

(Cf) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y =$ عدد بجوار $+\infty$ ؛ $-\infty$

2 ح

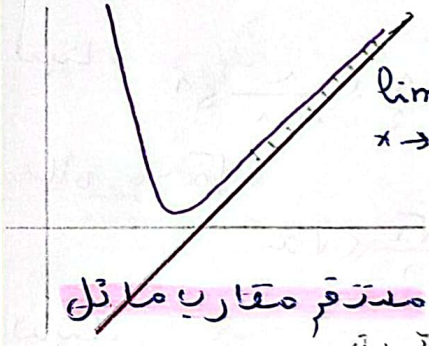


$\lim_{x \to} f(x) = +\infty$ (عدد)

$\lim_{x \to} f(x) = -\infty$ (عدد)

(Cf) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x =$ عدد

3 ح



$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل $b \neq 0$ يعطى في تمرين (بين ؛ أثبت) ⇐ لحساب نهاية الفرق نحاول

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] \overset{?}{=} 0$

م.م.م

نحصل على نهاية فرق أو يأتي توصلوا لحد لا.

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

م.م.م

⇐ (Cf) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax+b$ بجوار $+\infty$ ؛ $-\infty$

$b \neq 0$

(استنتاج) ⇐ الاحتمال الخاصية :

م.م.م

$f(x) = ax+b + \varepsilon(x)$

$\lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$ ⇐ لحساب :

و منه : $ax+b$ مستقيم مقارب مائل لـ (Cf) بجوار ∞.

Ex : $f(x) = \underbrace{2x+3}_{\text{م.م.م}} + \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ لأن :

فإن : المستقيم $y = 2x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (Cf) بجوار $+\infty$.

---

be careful :

(Cf) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x-1$ بجوار ∞.

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - x + 2] = 1$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - x + 2 - 1] = 0$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - x + 1] = 0$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - \underbrace{(x-1)}_{\text{م.م.م}}] = 0$

Alert :

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - x + 2] = 0$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - \underbrace{(x-2)}_{\text{م.م.م}}] = 0$

إخراج (-) كعامل مشترك.

⚠ في مثل هذه الحالات : يجب أن نرجع العدد إلى الطرف الآخر كي تكون النهاية تساوي 0 ثم نقوم بإخراج (-) كعامل مشترك وإلا لا. لأن الأصل في القانون

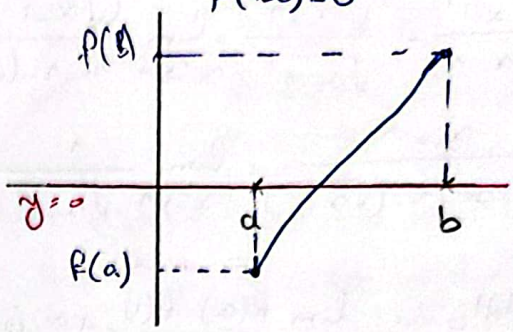
$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

م.م.م

مبرهنة القيم المتوسطة:

لحل المعادلة تقبل حل و $\neq$

$f(x)=0$

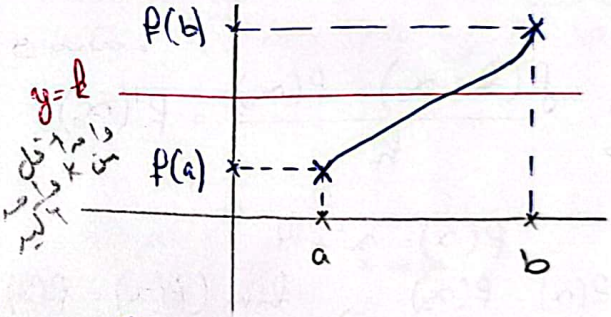


المعادلة تقبل حلا على الأقل على مجال $[a;b]$ إذا كانت:

- f مستمرة على المجال $[a;b]$
- $f(a)\times f(b)<0$

وإذا كانت f دالة رتيبة تماما على $[a;b]$ (متزايدة تماما، متناقصة تماما) فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

$f(x)=k$ (مبرهنة أعم)



المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا إذا كانت:

- f مستمرة على المجال $[a;b]$
- $f(a)<k<f(b)$

وإذا كانت f رتيبة تماما (متزايدة تماما، متناقصة تماما) فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

الاستمرارية

عند قيمة: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

مجاتنة حنة

على مجال:

كثيرات حدود، مقلوب، جذر، $\ln$، e^x، $\cos x$، $\sin x$ مستمرة على مجموعة تعريفها.

مجموع، جداء، قسمة، تركيب دالتين مستمرتين على مجال فهي مستمرة على هذا المجال.

مثال على الاستمرارية:

Ex:

$f(x)=x^2$ $\quad a=2$

لدينا: $f(2)=4$ و $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

أي: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ فإن الدالة f مستمرة عند $a=2$.

Ex

$f(x)=(x+1)\sin x$

الدالة $x\to\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و $x\to(x+1)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$ (جداء دالتين).

Ex:

$f(x)=x^3-x=-3$

f دالة مستمرة على المجال $[-2;1]$ لأنها كثير حدود

$f(-2)=-6$ و

$f(1)=0$

$-6<-3<0$ أي

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $x^3-x=-3$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-2;1]$

$f(x)=0$ حيث

قابلية الإشتقاق

1) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ عدد حقيقي — الدالة f متحدية Smooth

- غير موجودة → الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند x_0 → (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه
  - إلى الأعلى: $x \to x_0^> = +\infty$
  - إلى الأسفل: $x \to x_0^< = -\infty$
- ℓ (بيانيا = معامل توجيه المماس) → الإستنتاج → الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 → تفسير النتيجة بيانيا → (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$
- ∞ → الإستنتاج → الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند x_0 → (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه
  - إلى الأعلى: $x \to x_0^> = +\infty$
  - إلى الأسفل: $x \to x_0^< = -\infty$

حوصلة

$x \to x_0^> = +\infty$ و $x \to x_0^< = -\infty$ أو $x \to x_0^> = -\infty$ و $x \to x_0^< = +\infty$

Ex1:

$f(x) = x^2 - 4$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

م.ت.س 3

$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2-4-5}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ م.ت.س -3

$f'(3) = 6$ إذن

الإستنتاج:

الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 3$.

التفسير البياني:

(C_f) يقبل مماسا عند 3 معامل توجيهه 6

$f'(3) = 6$

Ex2: $f(x) = \sqrt{x-1}$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}$

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x-1})^2}{x-1 \cdot (\sqrt{x-1})}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1 \cdot (\sqrt{x-1})} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$= +\infty$

بما أن $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1.

التفسير البياني:

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = 1$

---

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

نضع $x - x_0 = h$ ومنه $x = h + x_0$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Ex: $f(x) = x^2 - 4$; $x_0 = 3$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

نضع $x - 3 = h$ ومنه $x = h + 3$

إذن $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+3)-f(x_0)}{h}$

$f(3+h) = (3+h)^2 - 4$

$= 9 + h^2 + 6h - 4$

$= h^2 + 6h + 5$

ومنه $\begin{cases} f(x_0) = f(3) = 5 \text{ نعوض في الدالة} \\ f(3) = 5. \end{cases}$

إذن $\lim_{h \to 0} \frac{h^2+6h+5-5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2+6h}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \to 0} h + 6 = 6$

العمليات على المشتقات :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$a.f$ ثابتة	$a.f'$	$2\cos x$	$-2\sin x$
U^n	$nU'U^{n-1}$	$(4x)^3$	$3.4(4x)^2$
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\sqrt{4x+3}$	$\frac{4}{2\sqrt{4x+3}}$
$\frac{1}{U}$	$-\frac{U'}{U^2}$	$\frac{1}{4x}$	$-\frac{4}{4x^2}$
$\cos U$	$-U'\sin U$	$\cos 3x$	$-3\sin 3x$
$\sin U$	$U'\cos U.$	$\sin 2x$	$2\cos 2x$

الإشتقاقية :

عند نقطة x_0 من I

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

أو

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

على المجال I

- الدوال كثيرات حدود، متقلوبة، جذر، e^x، $\ln x$، $\cos x$، $\sin x$.
- دوال قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.
- دوال مجموع، جداء، إقتسام، تركيب دالتين ⇐ دوال قابلة للإشتقاق

مشتقات الدوال المألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x.$

$f(x)$	$f'(x)$
17	0
$2x$	2
x^3	$3x^2$

المجموع : $(f+g)'=f'+g'$

الضرب : $(f\times g)'=(f'\times g)+(f\times g').$

القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{(f'.g)-(f.g')}{(g)^2}$

Ex1 : $f(x)=\frac{-3x^2+2x+1}{3}$ $\quad (a.f)'=a.f'$

$=\frac{1}{3}(-3x^2+2x+1)$

$f'(x)=\frac{1}{3}(-6x^2+2).$

$=-\frac{6x^2}{3}+\frac{2}{3}$

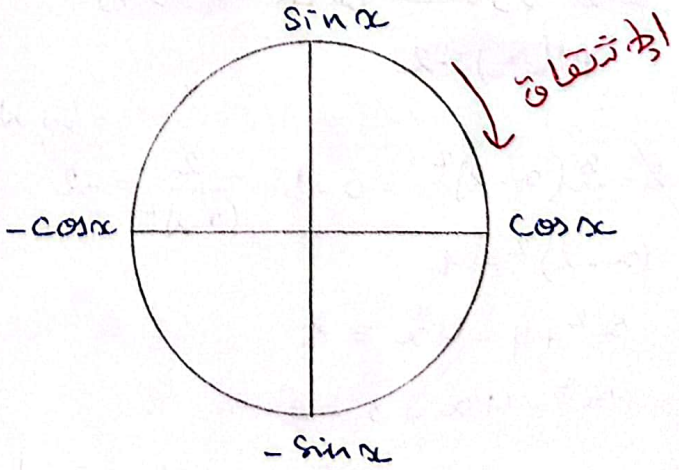
$=-3x^2+\frac{2}{3}.$

- مقام ثابتة تخرج من كل الدالة صادقة.

Ex2 : $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{1-x}-\sqrt{x}.$

$f'(x)=2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\left(-\frac{-1}{(1-x)^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$



تطبيقات الإشتقاقية:

- معادلة المماس ← مبنية على الاشتقاقية
- اتجاه تغير الدالة.
- القيم القصوى.
- نقطة الإنعطاف.

I - معادلة المماس:

يلزم قبل تشتقو

معادلة المماس تكتب من الشكل

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

مثال:

كتابة معادلة المماس عند $a = 0$.

$f(x) = -3x^2 + x - 4$.

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x) = -6x + 1$.

$y = 1(x - 0) - 4$ أي $\begin{cases} f(0) = -4 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

ومنه: $y = x - 4$.

لازم تكتب معادلة المماس ثم تشتق وتعوض.

مثال 2: $f(x) = \frac{3x - 4}{x - 2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

1 - f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$:

$$f'(x) = \frac{3(x-2) - 1(3x-4)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x - 6 - 3x + 4}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

← معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 / عند $x_0 = 1$.

- معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

ومنه = صايق هنا نعوض $x_0 = 1$ oky برك.

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

إذن:

$y = -2(x-1) + 1$ أي $\begin{cases} f'(1) = -2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

$y = -2x + 2 + 1$

ومنه $y = -2x + 3$.

← معادلة المماس عند النقطة ذات الترتيبة 5 = (x_0, y_0)

نحل معادلة $f(x) = 5$

إذن $\frac{3x-4}{x-2} = 5$

قبل ثم $3x - 4 = 5x - 10$ ومنه

نقوص.

$3x - 5x = -10 + 4$

$-2x = -6$

أي $x = \frac{-6}{-2}$ =

$x = 3$.

ومنه:

معادلة المماس تكتب من الشكل:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

إذن:

$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

$y = -2(x-3) + 5$ أي $\begin{cases} f'(3) = -2 \\ f(3) = 5 \end{cases}$

$y = -2x + 6 + 5$

ومنه:

$y = -2x + 11$

← تبيان أن المستقيم يقبل مماسين معاملي توجيههما كل منهما هو 2.

المماس هو عبارة عن مستقيم.

- المماس يكتب من الشكل:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

معامل توجيه المماس

$y = ax + b$

معامل توجيه المستقيم

معامل توجيه المماس يساوي -2.

$f'(x_0) = -2$.

نعوض هنا في: N بنا = متشققة ونحل:

إذن $\frac{-2}{(x-2)^2} = -2$

$-2 = -2(x-2)^2$

$(x-2)^2 = 1$

$x^2 + 4 - 4x = 1$ نقلبوها معادلة ضدية.

$x^2 - 4x + 3 = 0$

إذن:

$x_0 = 3$ و $x_0 = 1$

ثم هنا نعوض في معادلة المستقيم.

← يبين أن (Cf) يقبل مماس موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x - 1$

مماس يوازي المستقيم $y = -\frac{1}{2}x - 1$ أي $f'(x_0)$

- إذا كان $\begin{cases} y = ax+b \\ y = a'x+b' \end{cases}$ متوازيين فإنه يلزم أن يكون لهما نفس معامل التوجيه.

إذن: $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$.

أي: $\frac{-2}{(x-2)^2} = -\frac{1}{2}$ مشتقة

ومنه: $(x-2)^2 = 4$

أي $(x-2)^2 - 4 = 0$

نقلها معادلة صفرية

ومنه:

$x^2 - 4x + 4 - 4 = 0$

أي $x^2 - 4x = 0$

نخرج x كعامل مشترك فنحصل على:

$x(x-4)$

ومنه:

$x = 0$ أو $x = 4$

← مماس للمنحنى (C) تخامسه المستقيم ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$

التخامس: جداء معاملي توجيه = -1

$\begin{cases} y = ax+b \\ y = a'x+b' \end{cases} \Rightarrow a' \times a = -1$

معناه:

$f'(x_0) \times \frac{1}{2} = -1$

ومنه:

متقة $\frac{-2}{(x-2)^2} \times \frac{1}{2} = -1$

(نضرب في 2) أي $\frac{-1}{(x-2)^2} = -1$

إذن $\frac{1}{(x-2)^2} = 1$

ومنه $x^2 - 4x + 4 = 1$

أي $x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$

إذن: $x^2 - 4x + 3 = 0$

ومنه:

$x_1 = 1$ أو $x_2 = 3$.

← معادلة المماس التي تشمل النقطة $A(0,3)$ $x_0; y_0$

معادلة المماس تكتب من الشكل:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$A(0,3)$ نعوض x بـ 0 و y بـ 3

$3 = \frac{-2}{(x-2)^2}(0 - x_0) + \frac{3x_0 - 4}{x-2}$ (مشتقة، دالة)

أي $3 = \frac{-2x_0}{(x-2)^2} + \left(\frac{3x-4}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-2}\right)$ باه نوحد المقام

$3 = \frac{-2x_0}{(x-2)^2} + \frac{(3x-4)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$

$3 = \frac{-2x_0 + 3x_0^2 - 6x_0 - 4x_0 + 8}{(x-2)^2}$

$3x_0^2 - 8x_0 + 8 = 3(x-2)^2$

$3x_0^2 - 8x_0 + 8 = 3(x^2 - 4x + 4)$

$3x^2 - 8x_0 + 8 = 3x^2 - 12x + 12$

$-8x_0 + 8 + 12x - 12 = 0$

$4x_0 - 4 = 0$

ومنه

$x_0 = 1$ ونعوض في معادلة المماس

• اتجاه تغير الدالة :

- $f'(x) \geq 0$ على المجال I ؛ معناه :
الدالة f متزايدة تماما على I .
- $f'(x) \leq 0$ على المجال I ؛ معناه :
الدالة f متناقصة تماما على I .
- $f'(x) = 0$ على المجال I ؛ معناه :
الدالة f ثابتة على المجال I .

• كي يقلنا ادرس اتجاه تغير الدالة :
1- تبرير قابلية الاشتقاق .
2- حساب الدالة المشتقة .
3- دراسة إشارة المشتقة
= تدرج عن الخام $f'(x) = 0$
4- اتجاه تغير الدالة .
5- تشكيل جدول التغيرات .

• القيم الحدية المحلية :
• عندما تنعدم المشتقة عند c وإذا :
f تقبل قيمة حدية محلية $f(c)$
المشتقة الأولى تنعدم وتغير من إشارتها .
معناه f تقبل قيم حدية :
كبرى وصغرى .

Ex :

f'	$+\infty$	0	$-\infty$
	$-$	0	$+$
f		قيمة حدية صغرى	

انعدام وتغير إشارتها

• نقطة انعطاف :

$n = 2$:
نتعدم المشتقة الأولى و تغير مناتارتها .

$n = 2$:
دراسة الوضع النسبي بين المماس والمنحنى
المنحنى (Cf) المماس وتغير من وضعه النسبي .

$n = 3$:
تنعدم المشتقة 2 و تغير من اشارتها

(Cf) يقبل مركز تناظر $\Omega(\alpha ; \beta)$:
معناه :
$2\alpha - x \in D_f$ ؛ $x \in D_f$
$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

(Cf) يقبل محور تناظر $x = \alpha$
معناه :
$2\alpha - x \in D_f$ ؛ $x \in D_f$
$f(2\alpha - x) - f(x) = 0$

◊ تقاطع المنحنى مع محور الفواصل ومحور التراتيب.

← محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x)=0$.

← محور التراتيب:

نحسب $f(0)=\dots$.

◊ الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

حساب الفرق.

$f(x)-(ax+b)$.

- <0 : (C_f) يقع تحت (Δ).
- $=0$: (C_f) يقطع (Δ)
- >0 : (C_f) يقع فوق (Δ).

- يمس: الفرق لم يغير إشارته.
- يقطع: الفرق غير من إشارته.

◊ خطوات رسم منحنى دالة (إنشاء).

خطوات الإنشاء (الرسم):

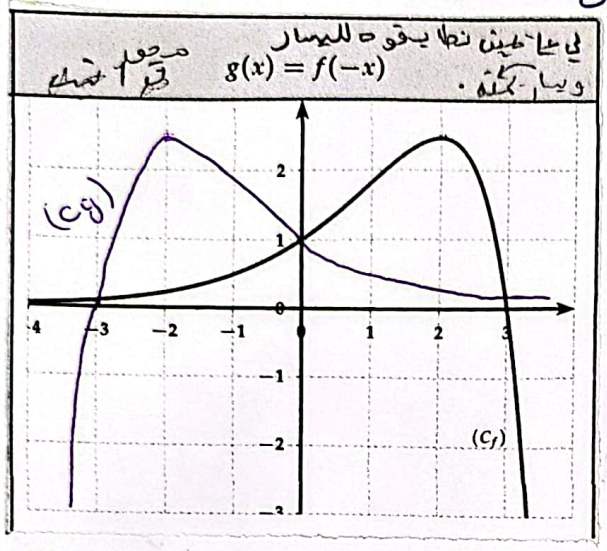
1. وحدة الرسم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. المجموعات المقارنة.
3. القيم الحدية.
4. التقاطع مع المحورين: محور الفواصل: حل معادلة $f(x)=0$؛ محور التراتيب: حسب $f(0)=\dots$
5. المماسات إن وجدت.
6. نقطة الانعطاف.
7. جدول تغيرات يربط الدالة.

كي يكون مماس يخترق

◊ استنتاج تمثيل بياني لدالة انطلاقا من (C_f) حيث f دالة تقبل مجموعة تعريف متناظرة.

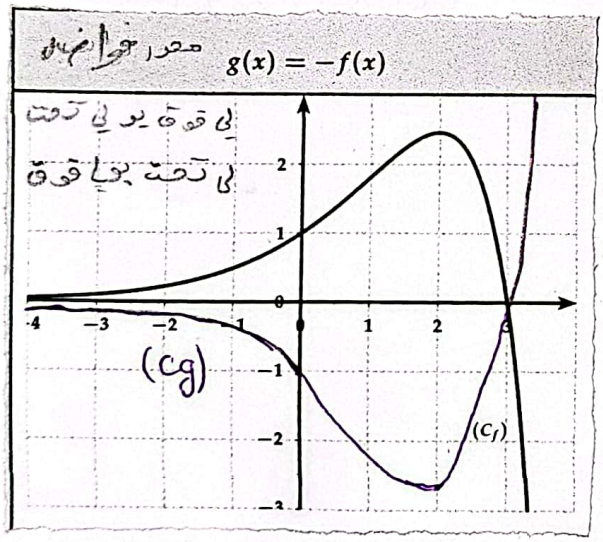
الحالة 1: $g(x)=f(-x)$

(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب



الحالة 2: $g(x)=-f(x)$.

(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.



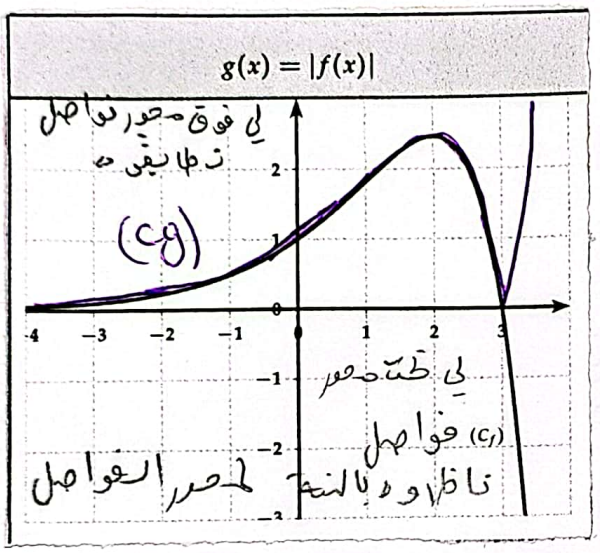
الحالة 3: $g(x)=f(-x)$

(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم O.

الحالة 3: $g(x) = |f(x)|$

$$|f(x)| \begin{cases} f(x) ; f(x) \in [0, +\infty[\\ -f(x) ; f(x) \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

- (C_g) ينطبق على (C_f) : $f(x) \in [0, +\infty[$ (فوق محور الفواصل).
- (C_g) نظير (C_f) : $f(x) \in]-\infty, 0]$ بالنسبة إلى محور الفواصل (تحت محور الفواصل)



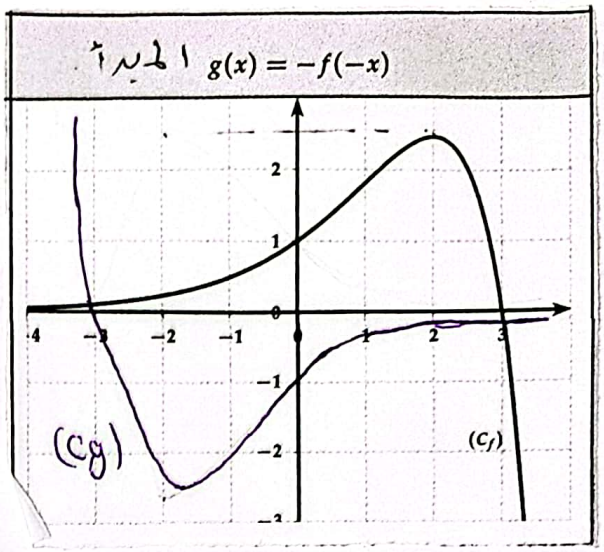
الحالة 4: $g(x) = f(|x|)$

$$|x| = \begin{cases} x ; x \in [0, +\infty[\\ -x ; x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

ومنه:

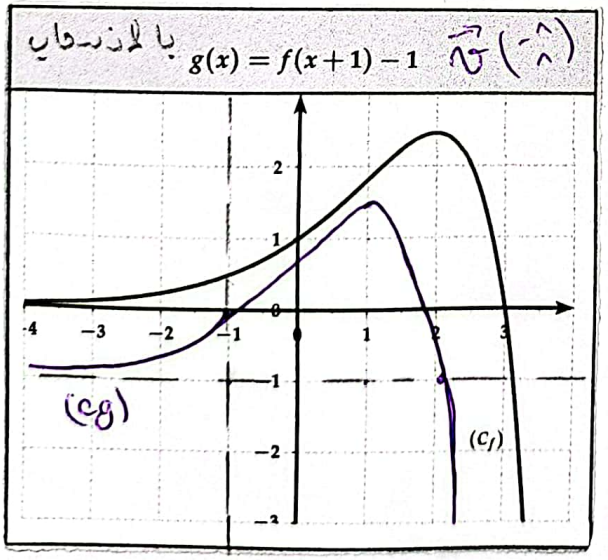
$$g(x) = \begin{cases} f(x) ; x \in [0, +\infty[\\ f(-x) ; x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

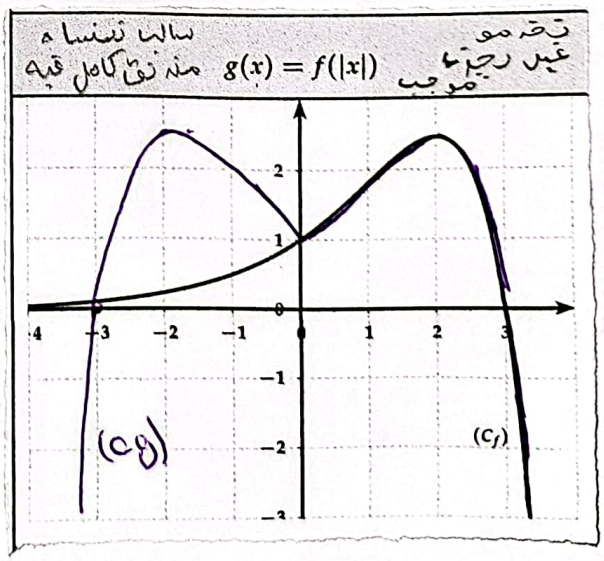
- (C_g) ينطبق على (C_f) على المجال $[0, +\infty[$.
- (C_g) نظير الجزء المنطبق على (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب على المجال $]-\infty, 0]$.



الحالة 5: $g(x) = f(x+a) + b$

- (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$.





القراءة البيانية:

← حساب الصورة: $f(x)$.

تقوم بالاسقاط على محور التراتيب.

← حساب العدد المشتق: $f'(x_0)$.

معناه: (حساب معامل توجيه المماس)

لا نحسب الميل.

لا نختار نقطتين $\begin{cases} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \end{cases}$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

← مماس أفقي ← معامل توجيه $= 0$.

← مماس عمودي ← معناه هاش معامل توجيه

← مماس مائل ← نحسب الميل عن طريق اختيار نقطتين.

مثال:

$f(\beta) = 0$

$f(\alpha) = 1$

قيمة $f'(-1)$ كيفاش؟ مماس أفقي

$f'(-2) = \frac{4-2}{-1+2} = \frac{2}{1} = 2$

$\begin{cases} A(-2, 2) \\ B(-1, 4) \end{cases}$ نحسب الميل

← قيم حدية كبرى وقيم حدية صغرى عندهم متساوية $= 0$.

← تعيين إشارة $f(x)$ = لازم نحوس على الجدول

معناه: الدالة فين تكون فوق أو تحت محور الفواصل.

x	$-\infty$	β	α	δ	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

← القيم لي تعدم ← تقاطع مع محور الفواصل

← الدالة f ← الفواصل

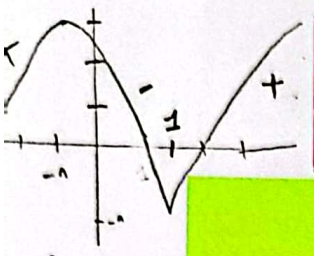
اتجاه تغير الدالة f = متزايدة ومتناقصة

إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖	$+$

الدالة غير قابلة للاشتقاق

مماس أفقي



اتجاه تغير f

$]-\infty, -1[$ متزايدة تماما

$]-1, 1[$ متناقصة تماما

$]1, +\infty[$ متزايدة تماما

إشارة $f'(x)$:

لما دالة قابلة لإشتقاق يجي نحوس على إتجاه تغير الدالة f يجي لوكانت الدالة متزايدة إشارة $f'(x)$ غادي تكون $+$ ولوكانت الدالة متناقصة إشارة $f'(x)$ غادي تكون $-$

والإنعدام نحوس وين مشتقة تنعدم وتغير من إشارة يعني وين يكون أرقى الحدية الكبرى والصغرى.

دالة غير قابلة للإشتقاق:

1- كي يكون كاين نصف مماس عمودي واحد.

2- كي يكون كاين نصفي مماسين لها معامل توجيه مختلف ← (نقطة زاوية) دوك قابلة لإشتقاق

3- دالة غير معرفة عندها ← غادي لاتشتق

إشارة $f'(x)$ تم جدول نيرو صد رمز ‖ معرفة غير

قيم لي تعدم مشتقة هي قيم حدية كبرى وقيم صغرى ومماس يكون عمودي أفقي

مماس أفقي معناه مشتقة تنعدم

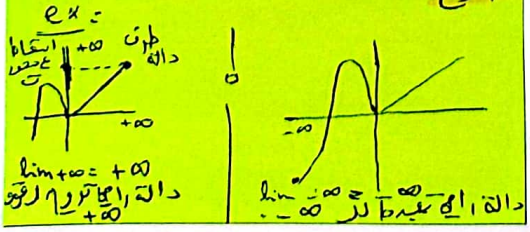
النهايات بيانيا:

النهايات بيانيا:

عند $+\infty$ ← نحكم طرف دالة ونسقطها على محور التراتيب ونشوف وين رايحا تروح.

عند $-\infty$ ← نحكم طرف دالة أيضا ونسقطها على محور التراتيب ونشوف غادا دالة وين رايحا تروح.

Ex:



حل متراجحات:

على العموم: حل متراجحة بيانيا أو حسابيا، تجب دراسة إشارة.

✓ - مشتقة مركب دالتين:

$f(x)$ = تركيب من يرا ميقوبس x.

- $[f(x)]^2 = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$.
- $e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
- $\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
- $\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$f(x)$ تركيب من داخل.

- $f(x^2) = 2x \cdot f'(x^2)$.
- $f(e^x) = e^x \cdot f'(e^x)$.
- $f(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x})$.
- $f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f'(\sqrt{x})$.

$\hookrightarrow f(x) = 1 f'(x)$