الدوال العددية

عدد التمارين : 88

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

الأستاذ مرنيز وليد

Tu me dis, j'oublie. Tu m'enseignes, je me souviens. Tu m'impliques, j'apprends.

اخر تحديث : 1 أكتوبر 2023

السنة الدراسية

2024 - 2023

المحتويات

I مدخل الى الدوال 4

1 مكتسبات قبلية 5
1.1 المتطابقات الشهيرة . . . 5
2.1 الحساب في $\mathbb{R}$ . . . 5
3.1 خواص القيمة المطلقة . . . 5
4.1 خواص الجذور . . . 6
5.1 خواص القوى الصحيحة . . . 6
6.1 قواعد الحصر . . . 6
7.1 اشارة كثير حدود من الدرجة الاولى . . . 6
8.1 اشارة و تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية . . . 7
9.1 مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية . . . 7
10.1 معادلات مضاعفات التربيع . . . 7
11.1 جذر كثير حدود . . . 8
12.1 تحليل كثير حدود . . . 8
13.1 طرق تحليل كثير حدود . . . 8

2 مجموعة تعريف دالة - النهايات 9
1.2 مجموعة تعريف دالة . . . 9
2.2 عمليات على النهايات . . . 9
3.2 نهاية بعض الدوال المرجعية . . . 10
4.2 حالات عدم التعيين و طرق ازالتها . . . 10
5.2 نهاية الدوال المثلثية . . . 10
6.2 مبرهنات في النهايات . . . 10
7.2 المستقيمات المقاربة . . . 11
8.2 تقاطع المنحنى مع حامل محور التراتيب و مع حامل محور الفواصل . . . 11
9.2 دراسة الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم . . . 12
10.2 انشاء محنى باستعمال منحنى اخر معلوم . . . 12
11.2 المناقشة البيانية . . . 13

3 الاستمرارية 14
1.3 الاستمرارية عند نقطة . . . 14

2.3 الاستمرارية على المجال . . . 14
3.3 العمليات على الدوال المستمرة . . . 14
1.3.3 نتائج . . . 15
4.3 استمرارية مركب دالتين . . . 15
5.3 مبرهنة القيم المتوسطة . . . 15

4 الاشتقاقية 16
1.4 قابلية الاشتقاق عند عدد . . . 16
2.4 جدول مشتقات بعض الدوال المالوفة . . . 16
3.4 المشتقات و العمليات على الدوال . . . 17
4.4 التفسيرات الهندسية للاشتقاقية . . . 17

5 تطبيقات الاشتقاقية 18
1.5 اتجاه تغير دالة . . . 18
2.5 القيم الحدية المحلية لدالة . . . 18
3.5 حصر دالة . . . 18
4.5 عنصر حاد من الاعلى -عنصر حاد من الاسفل . . . 18
5.5 معادلة المماس . . . 19
6.5 نقطة الانعطاف . . . 19

6 شفعية دالة - مركز تناظر و محور تناظر 20
1.6 شفعية دالة . . . 20
2.6 محور تناظر و مركز تناظر . . . 20

II تمارين تدريبية 21

7 النهايات و الاستمرارية 22

8 الإشتقاقية 26

III مواضيع بكالوريات جزائرية 29

9 شعبة علوم تجريبية 30

10 شعبة تقني رياضي 32

11 شعبة رياضيات 33

IV مسائل شاملة 34

...

القسم I

مدخل الى الدوال

...

1 | مكتسبات قبلية

1.1 المتطابقات الشهيرة

لكل عددين حقيقين a و b

متطابقات من الدرجة الثانية	متطابقات من الدرجة الثالثة
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

2.1 الحساب في $\mathbb{R}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

3.1 خواص القيمة المطلقة

لتكن x و y عددان حقيقيان.

$\lvert x\rvert \geq 0$	$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
$\lvert x \times y\rvert = \lvert x\rvert \times \lvert y\rvert$	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ مع $y \neq 0$	$\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
$\lvert x\rvert = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x \leq 0 \end{cases}$	$\lvert x+a\rvert = \begin{cases} x+a; x \geq -a \\ -x-a; x \leq -a \end{cases}$	$\lvert x-a\rvert = \begin{cases} x-a; x \geq a \\ -x+a; x \leq a \end{cases}$
$\lvert x\rvert = r$ معناه $x = r$ او $x = -r$	$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$ معناه $x = y$ او $x = -y$	$\lvert x\rvert \leq r$ معناه $-r \leq x \leq r$

4.1 خواص الجذور

a و b عددان حقيقيان غير معدومين، m و n عددان صحيحان نسبيان.

$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ من اجل a و b موجبان	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ من اجل $a \geq 0$ و $b > 0$

اخطاء شائعة : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

5.1 خواص القوى الصحيحة

$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$a^n \times b^n = (ab)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6.1 قواعد الحصر

لتكن a ، b ، c و d اعداد حقيقية موجبة تماما.

خاصية ال				
$a \leq x \leq b$ $c \leq y \leq d$	جمع	طرح	ضرب	قسمة
	$a+c \leq x+y \leq b+d$	$a-d \leq x-y \leq b-c$	$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$	$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

7.1 اشارة كثير حدود من الدرجة الاولى

لدراسة اشارة العبارة $ax+b$ حيث $(a \neq 0)$ ، نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax+b=0$ و نلخص النتائج كالاتي :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	اشارة $(-a)$	0	اشارة a

8.1 اشارة و تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $P(x)=ax^2+bc+c$ حيث $a\neq 0$
يسمى العدد $\Delta=b^2-4ac$ مميز ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.

اذا كان	اشارة $P(x)$	حلول المعادلة $P(x)=0$	تحليل $P(x)$
$\Delta>0$	x: $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ $P(x)$: اشارة a ; 0 ; اشارة $-a$; 0 ; اشارة a	المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	x: $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ $P(x)$: اشارة a ; 0 ; اشارة a	المعادلة تقبل حل مضاعف : $x_0=\dfrac{-b}{2a}$	$a(x-x_0)^2$
$\Delta<0$	x: $-\infty$; $+\infty$ $P(x)$: اشارة a	ليس للمعادلة حل في $\mathbb{R}$	لا يوجد تحليل

9.1 مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

اذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta\geq 0$ فان :

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a}$$
$$x_1\times x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز S و للجداء بالرمز P

$$S=-\frac{b}{a}\qquad P=\frac{c}{a}$$

تطبيقات

- حساب احد الحلين بمعرفة الاخر اذا علم احد الجذرين يمكن حساب الجذر الاخر و ذلك باستعمال المجموع S او P
- تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما و جداؤهما باستعمال العلاقة : $x^2-Sx+P=0$

- تعيين اشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

($ax^2+bx+c=0$)

اذا كان	فان
$\dfrac{c}{a}<0$	المعادلة تقبل حلين اشارتهما مختلفتان
$\dfrac{c}{a}>0$	و $\dfrac{-b}{a}>0$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما
	و $\dfrac{-b}{a}<0$ المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

10.1 معادلات مضاعفات التربيع

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4+bx^2+c=0$ الى حل الجملة $\begin{cases}X=x^2\\ aX^2+bX+c=0\end{cases}$

عند ايجاد قيمة X_1 و X_2 يجب تعويضهما في المعادلة $X=x^2$ لايجاد قيم x.

11.1 جذر كثير حدود

هنا جذر نعني به حل و ليس $\sqrt{}$.

العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha)=0$

12.1 تحليل كثير حدود

اذا كان α جذر لكثير الحدود f فانه يوجد كثير حدود g بحيث $f(x)=(x-\alpha)g(x)$

13.1 طرق تحليل كثير حدود

طريقة 1 (المطابقة)

لتكن $f(x)=2x^3-x^2-14x+16$. 2 هو جذر لـ f ومنه يمكن كتابة f على الشكل التالي :

$2x^3-x^2-14x+16=(x-2)(ax^2+bx+c)$ ، بالنشر نجد : $ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=2 \\ b-2a=-1 \\ c-2b=-14 \end{cases}$

ومنه : $a=2$ ، $c=-8$ و $b=3$ اذن : $f(x)=(x-2)(2x^2+3x-8)$

طريقة 2 (القسمة الاقليدية)

$$\begin{array}{rl|l} 2x^3 & -x^2-14x+16 & x-2 \\ \cline{3-3} -2x^3 & +4x^2 & 2x^2+3x-8 \\ \cline{1-2} & 3x^2-14x & \\ & -3x^2+6x & \\ \cline{2-2} & -8x+16 & \\ & 8x-16 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

2 | مجموعة تعريف دالة - النهايات

1.2 مجموعة تعريف دالة

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f
$f(x)=p(x)$	$D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,q(x)\neq 0\}$
$f(x)=\sqrt{p(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,p(x)\geq 0\}$
$f(x)=\dfrac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,q(x)>0\}$
$f(x)=\dfrac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,p(x)\geq 0;q(x)>0\}$
$f(x)=\sqrt{\dfrac{p(x)}{q(x)}}$	$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\,\dfrac{p(x)}{q(x)}\geq 0;q(x)\neq 0\right\}$

2.2 عمليات على النهايات

f	g	$f+g$
l	l'	$l+l'$
l	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح.ع.ت

f	g	$f\times g$
l	l'	ll'
$l\neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	ح.ع.ت

f	g	$\frac{f}{g}$
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l'\neq 0$	0	∞
l	∞	0
0	0	ح.ع.ت
∞	∞	ح.ع.ت

ملاحظات

- ∞ تعني اما $+\infty$ او $-\infty$
- الخانات الملونة خاصة بحالات عدم التعيين و هي " $\infty-\infty$ ، $0\times\infty$ ، $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$"

3.2 نهاية بعض الدوال المرجعية

$n \in \mathbb{N}^*$

الدالة مقلوب	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$	$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}=+\infty$
الدالة جذر	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$	$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$	$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$
الدالة x^n	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ مع n زوجي	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ مع n فردي	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

4.2 حالات عدم التعيين و طرق ازالتها

حالات عدم التعيين	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$
حالات يمكن التعيين	$\frac{l}{0}=\infty$	$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{l}{\infty}=0$	$\frac{0}{\infty}=0$

5.2 نهاية الدوال المثلثية

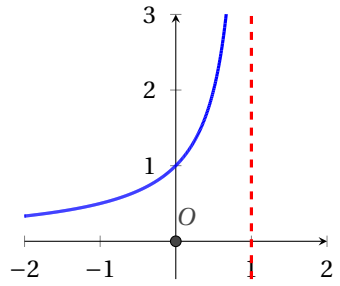
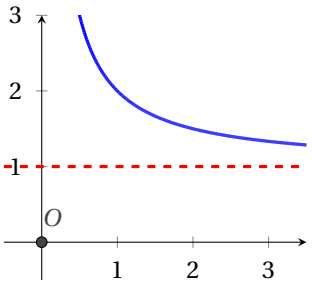
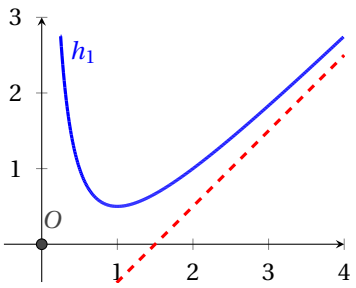
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

6.2 مبرهنات في النهايات

مبرهنة التركيب	a ، b و c تمثل اعداد حقيقية او $+\infty$ او $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$. اذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و اذا كانت $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فان $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$
مبرهنة الحصر	$\left.\begin{array}{r}u(x)\le f(x)\le v(x)\\ \lim\limits_{x\to a}u(x)=l\\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=l\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$
مبرهنة المقارنة	• $\left.\begin{array}{r}f(x)\ge g(x)\\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ • $\left.\begin{array}{r}f(x)\le g(x)\\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

7.2 المستقيمات المقاربة

لتكن f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

النهاية	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ او $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ او $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = y_0$ بجوار $+\infty$ او $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ او $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax+b$ عند $+\infty$ و $-\infty$	

اذا كانت الدالة f معرفة كمايلي : $f(x) = ax+b+\phi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = 0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x) = 0$ فمن الواضح ان المستقيم ذا المعادلة $y = ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f عند $+\infty$ او $-\infty$.

8.2 تقاطع المنحنى مع حامل محور التراتيب و مع حامل محور الفواصل

تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب (yy')	نحسب $f(0)$
تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx')	نحل المعادلة $f(x) = 0$ في D_f

9.2 دراسة الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم

(C_f) التمثيل البياني للدالة f و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$

اشارة الفرق $f(x) - y$	الوضعية النسبية
$f(x) - y > 0$	(C_f) يقع فوق (Δ)
$f(x) - y < 0$	(C_f) يقع فوق (Δ)
$f(x) - y = 0$	- الفرق لم يغير اشارته : (Δ) يمس (C_f) - الفرق يغير اشارته : (Δ) يخترق (C_f).

10.2 انشاء محنى باستعمال منحنى اخر معلوم

الدالة	التمثيل البياني
$f(x) = g(x) + k$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;k)$
$f(x) = g(x + a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;0)$
$f(x) = g(x + a) + b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$
$f(x) = \lambda g(x)$	M نقطة من (C_g) نرسم (C_f) بالاحتفاظ بالنقطة M ذات الفاصلة x وضرب ترتيب النقطة M في العدد λ
$f(x) = -g(x)$	المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x) = g(-x)$	المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور التراتيب
$f(x) = -g(-x)$	المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة الى مبدأ المعلم
$f(x) = g(\lvert x\rvert)$	■ اذا كان $x \geq 0$ فان $f(x) = g(x)$ ومنه (C_f) ينطبق على (C_g) ■ اذا كان $x \leq 0$ فان $f(x) = g(-x)$ ومنه (C_f) نظير على (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور التراتيب (f دالة زوجية)
$f(x) = \lvert g(x)\rvert$	■ اذا كان $g(x) \geq 0$ فان $f(x) = g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ■ اذا كان $g(x) \leq 0$ فان $f(x) = -g(x)$ ومنه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

11.2 المناقشة البيانية

ليكن (C_f) منحنى الدالة f و (Δ) مستقيم مائل (مماس او مستقيم مقارب) معادلته $y = ax + b$

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية $(m \in \mathbb{R})$
$f(x) = (m$عبارة تتضمن$)$	حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل
$f(x) = ax + (m$عبارة تتضمن$)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)
$f(x) = (m$عبارة تتضمن$)x + b$	حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول نقطة يجب تعيينها مسبقا.
$f(x) = f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل معادلتها $y = f(m)$

ملاحظات

- نقول ان للمعادلة حل موجب اذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور التراتيب
- نقول ان للمعادلة حل سالب اذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور التراتيب
- نقول ان للمعادلة حل معدوم اذا كانت نقطة التقاطع تقع على محور التراتيب

...

3 | الاستمرارية

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a

1.3 الاستمرارية عند نقطة

استمرارية دالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = l$
استمرارية الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} a} f(x) = f(a) = l_1$
استمرارية الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x\overset{<}{\to} a} f(x) = f(a) = l_2$

اذا كان $l_1 = l_2$ فان f مستمرة عند a

2.3 الاستمرارية على المجال

تكون f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ اذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من المجال $]a;b[$
تكون f مستمرة على المجال المغلوق $[a;b]$ اذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من المجال $]a;b[$ ومستمرة على يمين a ومستمرة على يسار b

3.3 العمليات على الدوال المستمرة

لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ و $f\times g$ و $k\times f$ مستمرة على المجال I
- اذا كانت g لا تنعدم على I فان الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ مستمرتين على المجال I

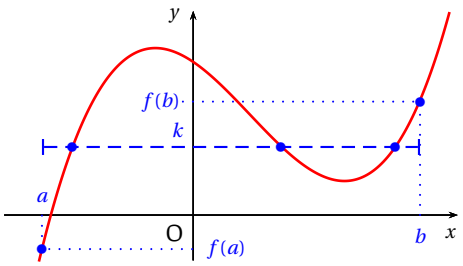
1.3.3 نتائج

- كل دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية مستمرة على مجموعة تعريفها
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ مستمرة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

4.3 استمرارية مركب دالتين

اذا كانت f مستمرة على مجال I و g مستمرة على مجال J بحيث $f(I) \in J$ فان : $g \circ f$ مستمرة على المجال I

5.3 مبرهنة القيم المتوسطة



مبرهنة 1	اذا كانت f مستمرة على مجال $[a;b]$ فانه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الاقل عدد حقيقي α من المجال $]a;b[$ بحيث : $f(\alpha) = k$
مبرهنة 2	اذا كانت f مستمرة ورتيبة على مجال $]a;b[$ وكان العدد حقيقي k محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ فان المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$
مبرهنة 3	اذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي الى المجال $]a;b[$
مبرهنة 4	اذا كانت f مستمرة على المجال $[a;b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الاقل عدد حقيقي α محصور بين a و b بحيث $f(\alpha) = 0$

...

4 | الاشتقاقية

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ و a عدد من D_f

1.4 قابلية الاشتقاق عند عدد

قابلية اشتقاق الدالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$
قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$
قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x\overset{<}{\to} a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$

اذا كان $f'_d(a)=f'_g(a)$ فان f قابلة للاشتقاق عند a

2.4 جدول مشتقات بعض الدوال المالوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
a (حيث $a\in\mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

3.4 المشتقات و العمليات على الدوال

الدالة	$u+v$	au	$u\times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'+v'$	au'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$	$v'\times u'(v)$

4.4 التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا موازي لمحور الفواصل معادلته : $y=f(x_0)$
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته : $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0)=b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته : $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماسا عمودي موجه نحو الاعلى معادلته : $x=x_0$
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماسا عمودي موجه نحو الاسفل معادلته : $x=x_0$
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماسا عمودي موجه نحو الاسفل معادلته : $x=x_0$
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلةللاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماسا عمودي موجه نحو الاعلى معادلته : $x=x_0$

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 فان f مستمرة عند x_0

5 | تطبيقات الاشتقاقية

1.5 اتجاه تغير دالة

لتكن دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة

المشتقة f'	اتجاه تغير الدالة f
f' موجبة تماما على المجال D_f	الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f
f' سالبة تماما على المجال D_f	الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f
f' معدومة على المجال D_f	الدالة f ثابتة على المجال D_f

2.5 القيم الحدية المحلية لدالة

اذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من المجال I مغيرة اشارتها نقول ان f تقبل قيمة حدية محلية $f(c)$

3.5 حصر دالة

- اذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فان : $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- اذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فان : $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

4.5 عنصر حاد من الاعلى -عنصر حاد من الاسفل

عنصر حاد من الاعلى للدالة f (Majorant)	عنصر حاد من الاسفل للدالة f (Minorant)
من اجل كل كل عدد حقيقي x : $f(x) \leq M$	من اجل كل كل عدد حقيقي x : $f(x) \geq m$

5.5 معادلة المماس

عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ، ثم نحسب كلا من $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونعوض في المعادلة
اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	اي نبحث عن الفاصلة x_0 وذلك بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق : $f'(x_0)$ **ملاحظة** $f'(x_0)$=معامل توجيه المماس	نحسب معامل التوجيه : $f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ، حيث النقطتين A و B من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها a ؟	نبحث عن الفاصلة x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ ، اي عدد حلول المعادلة هي عدد المماسات التي معامل توجيهها a
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذا المعادلة $(d) : y = ax + b$؟	نحل المعادلة : معامل توجيه $f'(x_0) = d$ اي $f'(x_0) = a$ اذا وجدنا حلول نقول يوجد مماسات لـ (C_f) موازية لـ (d)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha, \beta)$	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$ عدد حلول المعادلة تمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $(d) : y = ax + b$	نبحث عن x_0 بحل المعادلة : $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ ، a هو معامل توجيه (d). وعدد الحلول يمثل عدد المماسات

6.5 نقطة الانعطاف

الطريقة 1:	$f'(x)$ تنعدم و لا تغير اشارتها
الطريقة 2:	$f''(x)$ تنعدم مغيرة اشارتها
الطريقة 3:	عند دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و مماسه (Δ) ، نجد ان (Δ) يخترق (C_f)

6 | شفعية دالة - مركز تناظر و محور تناظر

1.6 شفعية دالة

	التعريف	التفسير الهندسي
الدالة الزوجية	f دالة زوجية يعني من اجل كل: $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فان : $f(-x) = f(x)$	(C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر
الدالة الفردية	f دالة فردية يعني من اجل كل: $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فان : $f(-x) = -f(x)$	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر

2.6 محور تناظر و مركز تناظر

محور تناظر	يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C_f) اذا تحقق الشرطان التاليان : ■ $(2a - x) \in D_f$ ■ $f(2a - x) = f(x)$
مركز تناظر	تكون النقطة $I(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) اذا تحقق الشرطان التاليان : ■ $(2a - x) \in D_f$ ■ $f(2a - x) + f(x) = 2b$

...

القسم II

تمارين تدريبية

...

7 | النهايات و الاستمرارية

حساب النهايات

1 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+2)$
2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x+\sqrt{3})$
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+3x+5)$
4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{5}$
5) $\lim\limits_{x\to -\infty}2(x+4)^2$
6) $\lim\limits_{x\to +\infty}x+\frac{1}{x}$
7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}$
8) $\lim\limits_{x\to +\infty}-x^4$
9) $\lim\limits_{x\to +\infty}-3+\frac{1}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to -\infty}-x^3$
11) $\lim\limits_{x\to -\infty}5+\frac{1}{x}$
12) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{-x}$

2 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to -1^{>}}\frac{x-1}{x+1}$
2) $\lim\limits_{x\to -1^{<}}\frac{x-1}{x+1}$
3) $\lim\limits_{x\to 2^{>}}\frac{2x^2+5}{x-2}$
4) $\lim\limits_{x\to 2^{<}}\frac{2x^2+5}{x-2}$
5) $\lim\limits_{x\to 3^{>}}\frac{-4x+1}{3-x}$
6) $\lim\limits_{x\to 3^{<}}\frac{-4x+1}{3-x}$
7) $\lim\limits_{x\to 2^{>}}\frac{x+1}{(x-2)^2}$
8) $\lim\limits_{x\to 2^{<}}\frac{x+1}{(x-2)^2}$
9) $\lim\limits_{x\to 0^{<}}2x-1+\frac{3}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to 0^{>}}2x-1+\frac{3}{x}$

حالات عدم تعيين

3 أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

- $f(x)=-x^3+2x-2$ ، $D_f=\mathbb{R}$
- $f(x)=3x^2+x-3$ ، $D_f=\mathbb{R}$
- $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

4 احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة:

1) $f(x)=3x^2-x+5$
2) $f(x)=-2x^2+x-4$
3) $f(x)=2x^3+x+1$
4) $f(x)=-3x^3-4x+5$
5) $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$
6) $f(x)=-x+\frac{x^3+x+1}{x-2}$
7) $f(x)=\frac{3x+1}{-x+2}$
8) $f(x)=\frac{x^3-3x+1}{x-1}$
9) $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+1}$
10) $f(x)=2x+3+\frac{1}{x}$
11) $f(x)=\frac{x+3}{x^2-x}$
12) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

5 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

6 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$$

احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

7 احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D (يطلب تعيينها) في كل حالة:

1) $f(x)=2+\sqrt{x}$
2) $f(x)=(1-x)(1+\sqrt{x})$
3) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$
4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x^2)$
5) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
6) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
7) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}$
8) $f(x)=\frac{3x^3+2}{2x^2+4}$

8 لتكن الدالة f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$$

احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

9 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$$

احسب نهاية الدالة f عند -2.

10 باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x+2}$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+3}$
6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$ حيث $a>0$ و $b>0$

11 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايتين:

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$
4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

12 علما ان $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{2x}$
4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$
5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{bx}$
6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{bx}$

13 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$
احسب نهاية الدالة f عند 0.

14 (نهاية دالة مركبة)
احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\sqrt{\dfrac{3x+4}{x-3}}$
2) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\sqrt{\dfrac{3-6x}{1-x}}$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+4}}$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$.
6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^2+x-3}$.

15 احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3-5x+1$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-x$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}(1+\sqrt{x})$
6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$
7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$
9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{5x+4}$
10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}$

16 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x} & ;x\neq0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

ادرس نهاية الدالة f عند 0.

17 احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة.

1) $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ 2) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{|x-1|}$

النهايات بالمقارنة/الحصر

18 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\sin x$
احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

19 نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين انه اذا كان $x>1$ فان: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

20

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq1$ فان: $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{x+1}\leq1$

2) استنتج النهايتين التاليتين:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

21 احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

22 ليكن x عدد حقيقي حيث $x>0$. اجب بصح او خطأ:

1) اذا كان $f(x)\geq x^2$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) اذا كان $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

3) اذا كان $1\leq f(x)\leq x+1$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

23 لتكن f دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x-\sin x}{3x+1}$$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\frac{2x-1}{3x+1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{3x+1}$$

2) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

3) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[2;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\frac{3x+\sin x}{x-1}$$

4) بين انه من اجل كل $x\geq2$ لدينا : $|g(x)-3|\leq\dfrac{4}{x-1}$

5) استنتج نهاية الدالة g عند $+\infty$.

24 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2}$
ادرس نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف. مبينا المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم .

25 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=2x+3+\frac{3}{x^2}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين ان المستقيم $(D): y=2x+3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (D).

26 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=-x+2+\frac{3}{x^2}$.
وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (Δ).

27 اجب بصح او خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي:
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ:
$f(x)=\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عبارة اخرى لـ $f(x)$ هي: $f(x)=-2x+3-\frac{5}{x-2}$.

2) يقبل المنحنى (C) مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=2$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

4) المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

28 لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.
عين الاعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث: (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ و مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و يشمل النقطة $A(0;4)$

29 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq-2$ يكون $f(x)=a+\frac{b}{x+2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D

3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f

4) عين مركز تناظر المنحنى (C)

30 لتكن f الدالة المعرفة من اجل كل عدد حقيقي $x\neq4$ كمايلي: $f(x)=\frac{x^2-x-10}{x-4}$

1) بين انه يوجد ثلاثة اعداد حقيقية a,b,c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq4$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-4}$

2) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي عند $+\infty$ وعند $-\infty$

3) ادرس الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة الى (D).

31 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:
$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم.

1) احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها مبينا المستقيم المقارب لـ (C).

2) ا) عين الاعداد الحقيقية a,b,c و d بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq-1$ يكون $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$

ب) استنتج ان المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

32 f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:
$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم

1) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

الاستمرارية

33 ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة a في كل مايأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $a=0$

2) $f(x)=x^2$ ، $a=2$

3) $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=0$

4) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\in[-1;2[\\ x-1 & ;x\in[2;5[\end{cases}$ ، $a=2$

34 نعتبرالدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)\sin(x)$
بين الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

35 برهن ان المعادلة $x^3-x=-3$ تقبل على الاقل حلا في المجال $[-2;-1]$

36 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) بين المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$

37 نعتبر الدالة f المعرفةعلى $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x+2 & ;x\in]-\infty;1] \\ f(x)=\sqrt{x} & ;x\in]1;+\infty] \end{cases}$$

1) ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

38 f دالة معرفة كمايلي: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ اذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=3$

1) ادرس استمرارية f عند 1.

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

39 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=3x+m & ;x\in]-\infty;1] \\ f(x)=x^2+1 & ;x\in]1;+\infty] \end{cases}$$

1) هل الدالة f مستمرة على $]1;+\infty[$ ؟ على $]-\infty;1]$؟

2) كيف نختار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

3) ارسم (C) المنحنى الممثل للدالة f.

40 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a; x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-a+b}{x}; x\leq 2 \end{cases}$
حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان. عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2

41 f دالة مستمرة معرفة على المجال $I=[0;1]$ بحيث من اجل كل x من I ، $f(x)\in I$
بين انه يوجد على الاقل عدد حقيقي α من I بحيث $f(\alpha)=\alpha$

42 f دالة معرفة على $[0;\pi]$ بـ: $f(x)=2+\dfrac{1}{2}\sin x$.
بين انه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$.

43 نعتبر الدالتين $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-x+2$ بين ان (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α محصورة بين 0 و 1.

44 f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\sqrt{x}$

1) برر لماذا الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$ ؟

2) ادرس اتجاه نغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) احسب $f(3)$ و $f(4)$.
استنتج ان المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[3;4]$

45 لتكن f دالة مستمرة على $[0;1]$ و تأخذ قيمتها في $[0;1]$.
بين ان المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الاقل حلا وحيدا في المجال $[0;1]$.

46 f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f(1)=1$
بين انه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$.
طبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

47 f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ بحيث

$$f(b)>b^2 \text{ و } f(a)<ab$$

بين انه يوجد عدد حقيقي c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=bc$

48 f دالة مستمرة معرفة على المجال $I=[0,1]$ بحيث من اجل كل x من I ، $f(x)\in I$
بين انه يوجد على الاقل عدد حقيقي α من I بحيث $f(\alpha)=\alpha$

49 بين ان كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الاقل جذرا حقيقيا.

50 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x^3+3x+3$$

1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) اثبت ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$

4) تحقق ان $2<\alpha<3$ ثم عين حصرا لـ α سعته 0.1.

...

8 | الإشتقاقية

الدوال المشتقة

51 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-4$
اثبت ان الدالة f تقبل الاشتقاق عند العدد $a=3$. معينا عددها المشتق عنده.

52 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2$

1) اثبت ان الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل عدد حقيقي a .

2) استنتج الدالة المشتقة للدالة f .

3) اكتب معادلة (T) مماس (C) منحنى الدالة f في معلم عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

53 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x|x-2|$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2 .

2) فسر بيانيا النتائج المحصل عليها.

54 لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x-1}$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1 .

2) فسر، بيانيا، النتيجة المحصل عليها.

قواعد الاشتقاق

55 عين مشتقة كل دالة من الدوال لآتية المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$

- $f(x)=2x^3-x^2+4x-1$
- $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$
- $f(x)=(x-1)\sin x$
- $f(x)=\dfrac{x^2-4x-3}{x^2+x+3}$
- $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
- $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$

56 احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة:

1) $f(x)=2x^2-5x+3$
2) $f(x)=\dfrac{-3x^3+2x+1}{3}$
3) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{x}$
4) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$
5) $f(x)=x(x^2+2)-1$
6) $f(x)=(x+1)(x^3-1)$
7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}(1+\sqrt{x})$
8) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$
9) $f(x)=\dfrac{-3x^2+x-2}{x^2+1}$
10) $f(x)=2x-\dfrac{1}{1-x}$
11) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}-\sqrt{x}$

تطبيقات الاشتقاقية

57 في كل حالة، اكتب معادلة المماس للدالة f عند النقطة التي فاصلتها a .

- $f(x)=-3x^2+x-4$ ، $a=0$
- $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+1}$ ، $a=-2$
- $f(x)=\dfrac{1}{2}x+2-\dfrac{1}{x-1}$ ، $a=3$
- $f(x)=\sqrt{5-2x}$ ، $a=2$
- $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ، $a=1$
- $f(x)=\cos 2x$ ، $a=\dfrac{\pi}{4}$

58 f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين f' الدالة المشتقة للدالة f

2) عين معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

3) عين معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة 5

4) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما هو -2

5) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماس موازي للمستقيم ذو المعالة $y=-\frac{1}{2}x-1$

6) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}x+2$

59 f دالة قابلة للاشتقاق عند -1 حيث $f'(-1)=2$ علما ان المنحني الممثل في معلم، للدالة f ، يمر بالنقطة $A(-1;-3)$ اكتب معادلة لمماس هذا المنحني عند النقطة A .

60 لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج القيمة الحدية للدالة f على الجدول .

61 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

- بين ان المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.

62 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

- بين ان المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.

63 (اتجاه تغير مركب دالتين)

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x+2}{x-2}$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) استنتج جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $]\sqrt{2};+\infty[$ بـ:

$$g(x)=f(x^2)$$

64 f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\cos x$

1) عين f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2) اعط تخمينا، حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ، لعبارة $f^{(n)}(x)$

65 لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بجدول تغيراتها المعطى بـ:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$		-2	↘	
			2			↗			$-\infty$

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ حيث : a ، b و c اعداد حقيقية

1) احسب $f'(x)$

2) اعتمادا على جدول التغيرات الدالة f :

ا) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c

ب) بين ان منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب عمودي

ج) قارن بين صورتي العددين 0 و $\frac{1}{2}$ معللا اجابتك

3) ناخذ فيمايلي : $a=-1$ ، $b=2$ ، $c=-1$ وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس

ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تحديد معادلة له

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f). انشئ المنحنى (C_f)

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول: $f(x)=m$

66 ★★★ | (متباينة برنولي)

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=(1+x)^n-1-nx$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1;+\infty[$

2) بين انه من اجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ و من اجل كل $x\in[-1;+\infty[$ فان

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

- من اجل اي قيمة لـ x تكون المساواة محققة؟

67 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامدو متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 .

2) بين انه من اجل كل $x\neq -2$ يمكن كتابة:

$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+4}$ حيث a ، b ، c ثلاثة اعداد حقيقية يطلب تعيينها.

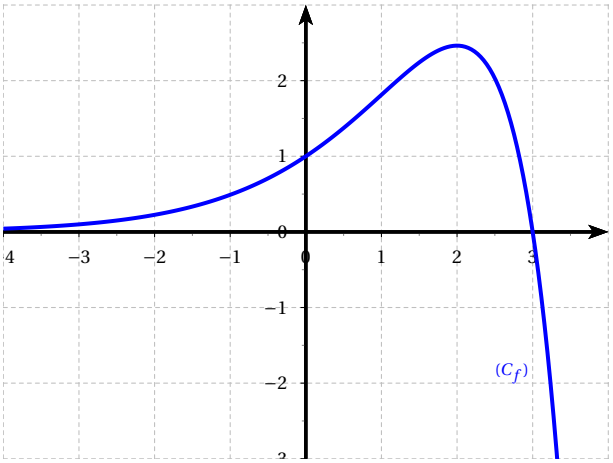
- استنتج ان المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلةله.
- ادرس وضعية (C) بالنسبة الى (Δ)

3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C)

5) ارسم (C) و المستقيمات المقاربة.

68 في الشكل المقابل (C_f) هو منحنى للدالة f.



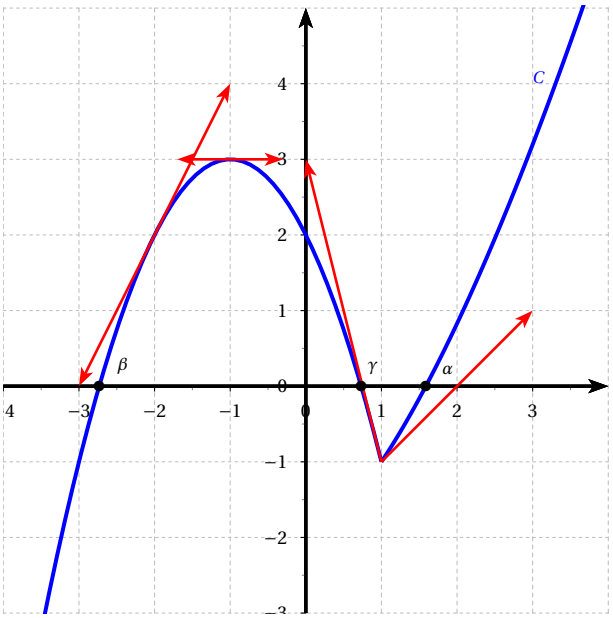
ارسم منحنى كلا من الدوال التالية انطلاقا من المنحنى (C_f).

$g_1(x)=f(-x)$ ، $g_2(x)=-f(x)$ ، $g_3(x)=-f(-x)$ ،

$g_4(x)=f(x-1)+1$ ، $g_5(x)=f(|x|)$ و $g_6(x)=|f(x)|$ ،

$g_7(x)=|f(|x|)|$

69 المنحنى (C) ادناه هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، معرفة على $\mathbb{R}$



بقراءة بيانيا اجب على الاسئلة التالية :

1) اوجد كل من $f(-2)$ ، $f(0)$ ، $f(\beta)$ ، $f'(-1)$ و $f'(-2)$.

2) عين حسب قيم x ، اشارة $f(x)$ و $f'(x)$

3) اوجد النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

4) اوجد قيمة $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\frac{f(x)+1}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\frac{f(x)+1}{x-1}$

5) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 ؟ فسر النتيجة هندسيا؟

6) اكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحنى (C) عند $x_0=1$

7) شكل جدول تغيرات الدالة f

8) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة -2

9) حل بيانيا المتراجحة : $f(x)f'(x)<0$

70 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=|x-3|+\frac{2}{x-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 3 مفسرا ذلك بيانيا.

3) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة التعريف.

4) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين ان المستقيمين $(\Delta):y=x-3$ و $(\Delta'):y=-x+3$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

6) حدد وضعية (C) بالنسبة الى (Δ) و (Δ') . ارسم (C) ، (Δ) ، (Δ') في نفس المعلم.

71 f هي الدالة المعرفة على المجموعة D_f بـ:

$D_f=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ مع $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ و C تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب النهايتين للدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) بين ان المستقيم ذي المعادلة $y=2x+3$ ، هو مستقيم مقارب للمنحنى C بجوار $(+\infty)$.

3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟

4) احسب $f'(x)$ من اجل $x\in D_f-\{-4;0\}$

5) انشئ جدول التغيرات للدالة f .

6) أرسم المستقيمات المقاربة ثم المنحنى C.

...

القسم III

مواضيع بكالوريات جزائرية

...

9 | شعبة علوم تجريبية

If you fail, never give up because F.A.I.L means"First Attempt In Learning". End is not the end. In fact, E.N.D means "Effort Never Dies". If you get No as an answer, remember No means "Next Opportunity

---

72 © | علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الثاني (5.07 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) ا) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معل متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5) انشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

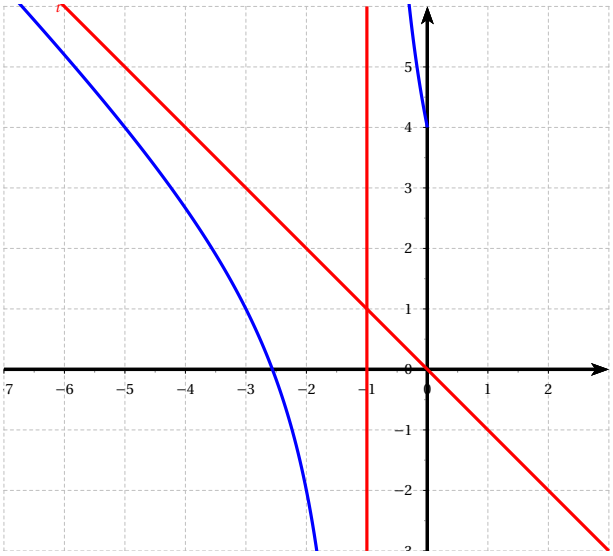
ا) تحقق انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$.

ب) استنتج ان (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم انشئ (C_h) .

73 © | علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الثاني (5.07 نقطة)

f دالة معرفة على المجال $I =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ :

$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل.



I) ا) احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

II) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

1) احسب نهاية g عند $+\infty$

2) تحقق ان (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

3) ادرس تغيرات g

III) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) ا) احسب $\lim\limits_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{h\overset{<}{\to}0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

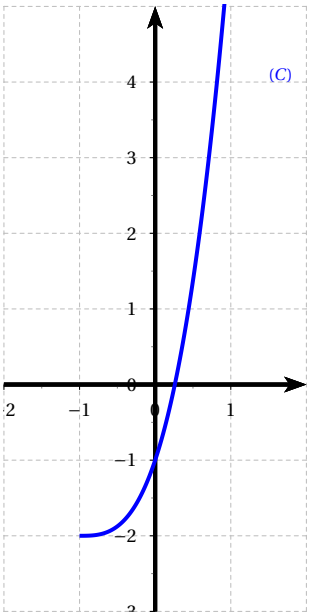
ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) اكتب معادلتي نصف المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$

3) ارسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k)

74 © | علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الثاني (07 نقاط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$



1) ا) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ و اشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ج) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ا) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج) احسب: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$. فسر النتيجتين بيانيا.

د) شكل جدول تغيرات f.

3) نأخذ: $\alpha=0.26$

ا) عين مدور $f(\alpha)$ الى 10^{-2}

ب) ارسم المنحنى (Γ)

10 | شعبة تقني رياضي

Our greatest weakness lies in giving up. The most certain way to succeed is always to try just one more time.

Thomas A. Edison

75 © | تقني رياضي - 2010 - الموضوع الثاني (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) اثبت ان الدالة f دالة فردية.

2) اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) اكتب معادل للماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

5) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (T) و استنتج ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

6) بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الاخر.

7) ارسم (d) و (d') و (C_f) في المعلم السابق.

8) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

ا) بين ان الدالة g زوجية

ب) انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

76 © | تقني رياضي - 2017 - الموضوع الثاني (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x)=x^3+6x+12$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $]-1.48;-1.47[$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة المستقيم (Δ)

ج) بين ان: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

د) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

...

11 | شعبة رياضيات

77 رياضيات - 2009 - دورة جوان، الموضوع الثاني (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$$f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) أ) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما (D) معادلته : $y=x$

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D)

3) أ) بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$

ب) عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

ج) ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق.

أ) بين كيف يمكن انشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$

78 ★★★ | (دراسة دالة وسيطية)

من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f_n(x)=(x^2-2x)^n$

1) احسب نهايات f_n عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2) ادرس تغيرات f_n (ميز الحالتين n زوجي و n فردي)

3) نسمي (C_n) التمثيل البياني للدالة f_n في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) تحقق ان المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_n) ثم ان (C_n) يمر من اربع نقط احداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n

ب) احسب احداثيات هذه النقط

4) انشئ في نفس المعلم (C_2) و (C_7)

79 ★★★ | (دراسة دالة وسيطية)

λ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$. f_λ هي الدالة المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f_\lambda(x)=x+\frac{2\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^3}$$

(C_λ) تمثيلها البياني

1) أ) ادرس نهايات الدالة f_λ عند حدود المجال I

ب) برهن انه يوجد مستقيم مقارب مائل d للمنحنى (C_λ) ثم ادرس وضعيتهما النسبية

2) أ) ادرس تغيرات الدالة f_λ على المجال I و شكل جدول تغيراتها

ب) اثبت ان f_λ تقبل قيمة حدية، تبلغها عند عدد حقيقي ندل عليه بـ x_λ

3) P_λ هي النقط من (C_λ) ذات الفاصلة x_λ

أ) اثبت ان مجموعة النقط P_λ محتواة في المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{16}{9}x$

ب) ما هي مجموعة النقط P_λ عندما يمسح λ المجال I

القسم IV

مسائل شاملة

80

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي:

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$1.6<\alpha<1.7$$

3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الرسم $4cm$

1) بين ان $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين

2) ا) تحقق انه من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ فان :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4) تحقق انه من اجل كل x من $]-1;1[$ ،

$$f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للماس (Δ) . ماذا تلاحظ ؟

6) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

7) انشئ المستقيم (Δ) و المنحنى

81 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي:

$$f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) احسب نهاية الدالة f عند 3 و فسر النتيجة هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{3\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) ا) اثبت وجود عددين حقيقين a و b بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{3\}$ فان : $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x-3}$

ب) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل Δ يطلب تعيين معادلة له

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

4) عين A نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

5) ا) اثبت ان المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي -3 ، يطلب تعيين احداثيات نقطتي التماس B و C

ب) برهن ان النقطتين B و C متناظرتان بالنسبة الى A

6) انشئ (C_f) و المماسين

7) ا) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي :

$$g(x)=\frac{x^2-8x+16}{|x-3|}$$

ب) اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$

ج) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g اعتمادا على (Cf)

82 f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي :

$$f(x)=3x+2-\frac{10}{x+1}$$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

4) (ا) اثبت انه من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f(-1-x)+f(-1+x)=-2$$

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

5) انشئ (C_f) و (Δ)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $3x^2+(5-m)x-8-m=0$

7) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=3|x|+2-\dfrac{10}{|x|+1}$

8) ا) اثبت ان g دالة زوجية

ب) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g اعتمادا على (C_f) ثم ارسمه

83 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$. (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) ا) برر ان المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$ ، هو مقارب للمنحنى (C). ادرس الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل. .

ب) ارسم (d) ثم (C)

3) باستعمال (C) ، عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و اشارة حلول المعادلة: $x^2+(1-m)x+2m=0$

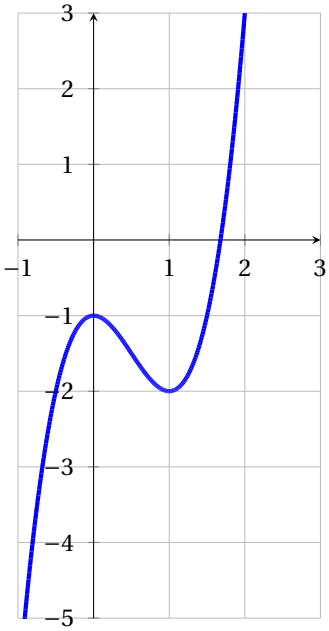
4) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $g(x)=\left|\dfrac{x(x+1)}{x-2}\right|$

- اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x .
- ارسم (γ) منحنى الدالة g اعتمادا على (C) .

5) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}$

- بين ان h دالة زوجية.
- ارسم (Γ) منحنى الدالة h اعتمادا على (C) .

84 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x^3-3x^2-1$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.



ا) 1) لاحظ (C_g) ثم ضع تخمينا حول اشارة $g(x)$.

2) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1,6 و 1,7 .

4) استنتج، حسب قيم x اشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة: $4cm$)

1) بين ان $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ اعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين.

2) بين انه من اجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة0.

5) تحقق انه من اجل كل x من $]-1;1[$: $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

6) بعد دراسة اشارة $f(x)-(-x+1)$ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للماس (Δ) . ماذا تستنتج؟

- نأخذ $\alpha\approx 1.64$

1) عين مدور $f(\alpha)$ الى 10^{-2} .

2) ارسم (C_f) و (Δ) .

85 لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بمايلي:

$$g(x)=f(x)-xf(x)+1$$

f هي الدالة الموجبة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و التي تحقق $f(x)=f'(x)$ ، $f(0)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

1) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

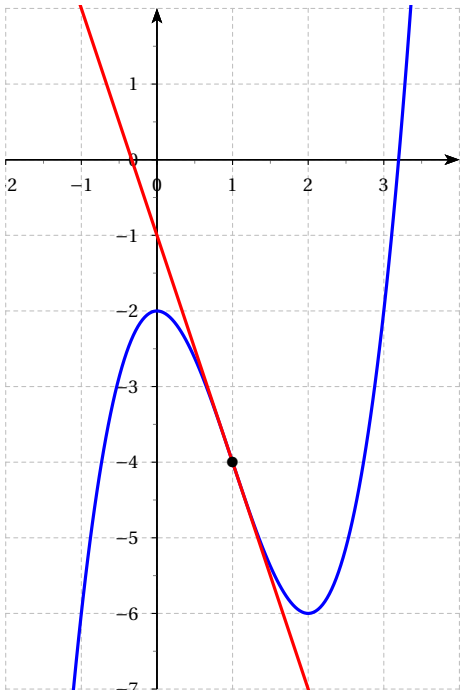
3) اثبت ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$

4) استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$

5) اثبت المساواة: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

86

I) المنحنى الموالي هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=x^3-3x^2-2$



بقراءة بيانية:

1) حل المتراجحة $g'(x)\geq 0$

2) احسب $g'(1)$ و $g''(1)$

3) شكل جدول تغيرات الدالة g

4) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.1,3.2[$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ ، (C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ، ثم فسرالنتيجة هندسيا

2) اثبت انه من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x)=\dfrac{(x-1)g(x)}{(x-1)^4}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) ا) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

5) برهن انه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) ، يطلب اعطاء معادلة له

6) جد احداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع محوري الفواصل و التراتيب

7) انشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

8) ناقش بياني حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

87 نعتبر الدالة f المعرفة : بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ يرمز (C) الى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f. استنتج معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحنى (C)

2) اكتب معادلة لمماس المنحنى (C) عند نقطته ذات الفاصلة 5

3) اثبت ان المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى (C). ارسم المنحنى (C)

4) نعتبر الدالة f_m المعرفة بـ: $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث m وسيط حقيقي.

ا) ادرس تغيرات الدالة f_m و استنتج المستقيمين المقاربين لمنحناها (C_m)

ب) بين انه توجد نقطة وحيدة تنتمي الى كل المنحنيات (C_m)

ج) ماهو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الاحداثيين $(4;1)$ ؟

88 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=|x+1|-\dfrac{4}{x-1}$ و (C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

2) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

3) احسب $f'(x)$ و ادرس اشارتها، ثم شكل جدول التغيرات

4) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) بجوار $+\infty$ و (Δ') بجوار $-\infty$

5) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ و (Δ') على المجال $]-\infty;1[$

(ا) احسب $\lim\limits_{h\to 0^{>}}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{h\to 0^{<}}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

(ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

(ج) اكتب معادلتي نصفي المماسين (T_1) و (T_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-1$

6) انشئ (C_f) ، (Δ) و (Δ') ونصفي المماسين

7) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=m+1$