الاحتمالات

عدد التمارين : 90

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

الأستاذ مرنيز وليد

Saviez-vous que le LION, lorsqu'il sort pour chasser, échoue 7 à 10 fois avant de réussir à capturer sa proie? 85% de sa vie est échec.

Alors; qu'est-ce qui fait de lui un ROI???

SA PERSEVERANCE.

Bonne continuation… Tu vas devenir quelqu'un d'exceptionnel, j'y crois !

اخر تحديث : 25 مارس 2024

السنة الدراسية

2024 - 2023

المحتويات

I بطاقة تعريفية للإحتمالات 3

II تمارين تدريبية 7

III مواضيع بكالوريات جزائرية 13

1 شعبة علوم تجريبية 14

2 شعبة تقني رياضي 17

3 شعبة رياضيات 20

IV مواضيع بكالوريات أجنبية 23

V مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس اشبال الامة 26

4 شعبة علوم تجريبية 27

5 شعبة رياضيات 31

VI تمارين مقترحة للتعمق 34

...

القسم I

بطاقة تعريفية للإحتمالات

المبدا الاساسي للعد

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا
اذا كان الاختيار الاول يتم بـ n_1 كيفية مختلفة
وكان الاختيار الثاني يتم بـ n_2 كيفية مختلفة
وكان الاختيار p يتم بـ n_p كيفية مختلفة
فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء :

$$n_1 \times n_2 \cdots \times n_p$$

الاعداد $n!$، A_n^p و C_n^p

$n \in \mathbb{N}^*$

$0! = 1$ $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$			
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$		$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	
$C_n^{n-1} = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$		$C_n^p = C_n^{n-p}$	

بعض الانواع السحب

نسحب p عنصر من بين n عنصر $(p \leq n)$
نلخص النتائج في الجدول التالي :

طريقة السحب :	عدد السحبات الممكنة :	الترتيب :	التكرار :
في ان واحد	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	غير مهم	-
على التوالي و بارجاع	$n^p = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ مرة}}$	مهم	يسمح التكرار ولا شرط على n و p
على التوالي و بدون ارجاع	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	مهم	لا يسمح التكرار $n \geq p$

ملاحظات

- اذا كان السحب على التوالي فيجب اخذ الحيطة و الحذر من **معامل الترتيب**
- معامل الترتيب يحسب بالطريقة التالية : $A_{n_1}^{p_1} \times A_{n_2}^{p_2} \times \cdots \times A_{n_k}^{p_k} \times \alpha$

حيث :

$$\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)!}{p_1! \times p_2! \times \cdots p_k!}$$

مصطلحات

الخاصية	لغة الحوادث
$0 \leq P(A) \leq 1$	A جادثة كيفية
$P(\Phi) = 0$	الحادثة المستحيلة
$P(\Omega) = 1$	الحادثة الاكيدة
$P(A) = 1 - P(\overline{A})$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	A و B كيفيتان
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	A و B غير متلائمتان
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	الاحتمال الشرطي (A علما ان B)
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	A و B حادثتان مستقلتان

ملاحظة هامة

- حرف **"و"** في الاحتمالات معناه **التقاطع** و يعني كذلك **الجداء**
- كلمة **"أو"** في الاحتمالات معناه **الاتحاد** و يعني كذلك **الجمع**
- يجب قراءة نص السؤال جيدا وان لا نخلط بين $P_A(B)$ و $P(A \cap B)$.

طريقة :
نستعين بالعبارات "علما ان" ، "اذا كان B، احتمال A"...

في حالة تساوي الاحتمالات

بعض العبارات التي تدل على تساوي الاحتمالات : "لكل الامكانيات نفس الاحتمال"، "زهرة نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقدية متوازنة"، "كريات لا نفرق بينها باللمس"...

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

المتغير العشوائي

الامل الرياضياتي للمتغير X	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
التباين	$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(p_i x_i^2)-(E(X))^2$
الانحراف المعياري	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

حالة خاصة

اذا كان $E(X)$ يمثل الربح المتوسط الذي يامله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة فان :

- $E(X)=0$ اللعبة عادلة
- $E(X)>0$ اللعبة مربحة
- $E(X)<0$ اللعبة ليست في صالح اللاعب

خواص الامل الرياضياتي و التباين لمتغير عشوائي

X المتغير العشوائي و a ، b عددان حقيقيان :

- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $V(aX+b)=a^2V(X)$
- $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

دستور الاحتمالات الكلية

- لتكن B_1 ، $B2$ ، $\cdots$ ، B_n تشكل تجزئة للمجموعة Ω ، لدينا من اجل كل حادثة A :

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n)$$

شجرة الاحتمالات



...

القسم II

تمارين تدريبية

1 |

يحتوي صندوق على 32 كرة لا نفرق بينها باللمس.
نسحب من الصندوق 8 كرات عشوائيا.

1) اذا تم السحب في ان واحد . ما عدد الحالات الممكنة؟

2) اذا تم السحب على التوالي دون ارجاع. ما عدد الحالات الممكنة ؟

3) اذا تم الحسب على التوالي مع الارجاع . ما عدد الحالات الممكنة؟

2 |

- بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من 26 ؟
- بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب له؟

3

نريد ترتيب 8 اشخاص حول طاولة مستديرة.
بكم طريقة مختلفة يمكن تحديد وضعية كل شخص؟

4

ما عدد الاعداد ذات 3 ارقام مختلفة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها باستعمال الارقام 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9
من بين هذه الاعداد. ما عدد الاعداد

- الزوجية؟
- مضاعفات 5 ؟
- الاصغر من 500؟

5

احسب مايلي:

- $\frac{9!}{6!}$
- $\frac{13!-12!}{12!}$
- $\frac{11!}{9!\times 2!}$
- $\frac{4}{12!}-\frac{4}{11!}+\frac{4}{10!}$

6

n عدد طبيعي غير معدوم. بسط العبارات التالية :

- $\frac{n!}{(n+1)!}$
- $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
- $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$
- $\frac{n!}{n}-(n-1)!$

7 |

اوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

1) $C_n^3=56$

2) $C_n^3+C_n^2=8n$

3) $9C_n^2=2C_{2n}^2$

8 n و m عددان طبيعيان حيث $n\geq m\geq 0$

1) اثبت ان $C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$

2) استنتج ان $C_m^m+C_{m-1}^m+\cdots+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$

9

n و m عددان طبيعيان حيث $n\geq 2$ و $n-2\geq m$. اثبت صحة المساواة التالية :

- $C_{2n}^n=2C_{2n-1}^{n-1}$
- $C_n^m=C_{n-2}^{m-2}+2C_{n-2}^{m-1}+C_{n-2}^m$

10 |

x ، y عددان حقيقيان. باستعمال دستور ثنائي الحد انشر العبارات التالية:

- $(1+x)^4$
- $(2-x)^5$
- $(2x+1)^6$

11

كيس به 12 كرية متجانسة، لا نفرق بينها باللمس، منها:
5 خضراء، 4بيضاء، 3 حمراء.
نسحب في آن واحد 3 كريات من هذا الكيس.

1) ماهو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب؟

2) ماهو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب في الحالات التالية:

ا) الكريات من الوان مختلفة.

ب) الكريات من نفس اللون.

ج) على الاقل كرية بيضاء

د) على الاكثر كرية خضراء

12

نرمي قطعة نقدية متوازنة مرتين. (نرمز بـ F الى الوجه و بـ P الى الظهر)

1) عين Ω مجموعة الامكانيات لهذه التجربة.

2) اوجد احتمال كل حادثة من الاحداث التالية:
A "ظهور الوجه مرة واحدة فقط"
B "ظهور الوجه مرتين"
C "ظهور الوجه مرة واحدة على الاكثر"

13 | ✎

صندوق به 15 كرية 6 سوداء و 5 حمراء و 4 صفراء. نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد.

1) ماهو عدد السحبات الممكنة
2) ما هو احتمال الحصول على كرتين سوداء وكرة صفراء
3) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات من نفس اللون.
4) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات مختلفة في اللون
5) ماهو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الاقل
6) ماهو احتمال الحصول على كرتين صفراء على الاكثر.
7) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات حمراء
8) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات منهم واحدة سوداء فقط.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء.

1) حدد القيم التي ياخذها X
2) حدد قانون الاحتمال
3) احسب الامل الرياضي
4) احسب التباين
5) احسب الانحراف المعياري.

14 | ✎

كيس به 9 كريات 3 سوداء و 4 حمراء و 2 خضراء. نسحب من الكيس عشوائيا 3 كريات على التوالي وبدون ارجاع الكرية المسحوبة

1) ماهو عدد السحبات الممكنة
2) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات تحمل لون احمر
3) ماهو احتمال الحصول على كريتين سوداء و كرة خضراء
4) ماهو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الاقل

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات الحمراء

1) حدد القيم التي ياخذها X
2) حدد قانون الاحتمال
3) احسب الامل الرياضي
4) احسب التباين.
5) احسب الانحراف المعياري

15 | ✎

صندوق به 8 كريات 2 بيضاء و 3 حمراء و 3 سوداء. نسحب عشوائيا 3 كريات على التوالي وبارجاع الكرية المسحوبة الى الكيس

1) ماهو عدد السحبات الممكنة
2) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات من نفس اللون.
3) ماهو احتمال الحصول على كرة بيضاء وكرتين سوداء
4) ماهو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الاقل.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء.

1) حدد القيم التي ياخذها X
2) حدد قانون الاحتمال
3) احسب الامل الرياضي
4) احسب التباين
5) احسب الانحراف المعياري

16 | ✎

في ثانوية ما نجح 40% من التلاميذ في امتحان الرياضيات، 25% من التلاميذ في امتحان الفيزياء، 15% في امتحان الرياضيات و الفيزياء. نختار عشوائيا تلميذ و نفرض ان جميع الاختيارات متساوية الاحتمال.

1) ما هو احتمال ان لا يكون التلميذ المختار ناجح في امتحان الرياضيات
2) ما هو احتمال ان يكون التلميذ المختار ناجح في الرياضيات او في الفيزياء
3) ما هو احتمال ان يكون التلميذ المختار ناجح في الفيزياء و غير ناجح في الرياضيات.

4) ما هو احتمال ان يكون التلميذ المختار غير ناجح في الرياضيات و غير ناجح في الفيزياء

5) اذا اخترنا التلميذ الناجح في الرياضيات فما هو احتمال ان يكون ناجح في الفيزياء

17 | ✎

قسم تربوي مكون من40 تلميذا منهم 25 بنتا و15 ولدا. نريد تشكيل لجنة مكونة من ثلاث تلاميذ.

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها

2) اذا كانت اللجنة مكونة من رئيس القسم و نائب الرئيس و النائب العام.

ا) ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها اذا كان رئيس القسم ولدا و النائب العام بنتا.

ب) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها اذا كان نائب الرئيس بنتا

18 | ✎

يحتوي صندوق على 10 كريات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها خمس بيضاء اللون تحمل الارقام 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 1 و ثلاث حمراء اللون تحمل الارقام 2 ، 2 ، 3 وكريتان سوداء تحمل الرقمين 1 ، 1 . نسحب عشوائيا و في ان واحد 3 كرات من هذا الصندوق.

1) ماهو عدد السحبات الممكنة.

2) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء فقط

3) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات تحمل الرقم 2

4) ما هو احتمال الحصول على كريتين تحملان الرقم 1

5) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات مجموع ارقامها يساوي 7

6) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات مجموع ارقامها اكبر تماما من 7

7) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات جداءها اقل تماما من 6

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات التي تحمل الرقم 2

1) حدد القيم التي ياخذها X

2) حدد قانون الاحتمال

3) احسب الامل الرياضي

4) احسب التباين

5) احسب الانحراف المعياري

19 | ✎

تحتوي علبة على 10 قريصات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها 6 حمراء اللون تحمل الارقام 1 ، 2 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 و البقية بيضاء اللون تحمل الارقام 1 ، 3 ، 5 ، 5 نسحب 3 قريصات من هذه العلبة واحدة تلو الاخرى دون ارجاع.

1) شكل شجرة الاحتمال المناسبة لذلك

2) ماهو احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون.

3) ما هو احتمال الحصول على 3 قريصات بلونين مختلفين

4) ماهو احتمال الحصول على 3 قريصات تحمل 3 ارقام مجموعها يساوي 15

5) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات مجموعها يساوي 15 علما انها من نفس اللون.

20 | ✎

رقمت اوجه نرد مزيف من 1 الى 6. عند رمي هذا النرد نفترض ان احتمال ظهور وجه يحمل رقما زوجيا هو 3 اضعاف احتمال ظهور وجه يحمل رقما فرديا.

1) احسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما فرديا و احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما زوجيا.

2) احسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقم 1

3) عندما يرمي شخص هذا النرد يربح 20 دينارا اذا ظهر الوجه الذي يحمل رقم 2 و يربح 10 دنانير اذا ظهر الوجه الذي يحمل رقم 5 اما اذا ظهر وجه اخر غير هذين الوجهين فانه يخسر 5 دنانير.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمي عدد النقط المحصل عليها.

1) ماهي قيم المتغير العشوائي X

2) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

3) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ احسب التباين

4) احسب الانحراف المعياري.

21 |

يحتوي صندوق على 8 قربصات بيضاء و n قريصة سوداء بحيث $n \geq 2$ نفرض ان سحب كرية بيضاء يعطي ربح نقطة و سحب كرية سوداء يفقد نقطتين.
ليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع النقط المحصل عليها.

1) نسحب من هذا الكيس كريتين على التوالي مع اعادة الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي.
   ا) عين قيم المتغير العشوائي x
   ب) عرف قانون الاحتمال
   ج) احسب بدلالة n الامل الرياضي $E(x)$.
   هل توجد قيمة لـ n حتى تكون $E(x) = 0$ ؟
2) نفرض ان السحب يكون في ان واحد
   ا) عين قيم المتغير العشوائي x
   ب) عرف قانون الاحتمال
   ج) احسب بدلالة n الامل الرياضي $E(x)$ هل توجد قيمة لـ n حتى يكون $E(x) = 0$ ؟

22

يحتوي صندوق على 12 كرية. منها 5 حمراء و 4 سوداء و 3 خضراء. نسحب عشوائيا في ان واحد 4 كرات.

1) ماهو عدد السحبات الممكنة.
2) ماهو احتمال الحصول على 4 كرات من نفس اللون.
3) ماهو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون و كرتين من لونين مختلفين
4) ماهو احتمال الحصول على 4 كرات من لونين مختلفين
5) ماهو احتمال الحصول على كرتين سوداء فقط و كرة خضراء واحدة على الاقل
6) ما هو احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة فقط وكرتين حمراء على الاكثر
7) ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة فقط.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الالوان المتحصل عليها.

1) حدد القيم التي ياخذها X
2) حدد قانون الاحتمال
3) احسب الامل الرياضي

23 |

يحتوي صندوق على 9 كريات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها اربعة حمراء اللون تحمل الارقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاثة سوداء اللون تحمل الارقام 2 ، 2 ، 3 وكريتان خضراء تحمل الرقمين 2 ، 3

1) نسحب كريتين عشوائيا و في ان واحد
   ا) ماهو احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون
   ب) ماهو احتمال الحصول على كريتين من نفس الرقم
   ج) ماهو احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الاقل
   د) ماهو احتمال الحصول على كريتين مجموع ارقامهما يساوي 5
2) **نفس السؤال و لكن السحب يكون على التوالي و بدون ارجاع**
3) **نفس الاسئلة و لكن السحب يكون على التوالي و بارجاع الكرية المسحوبة**

24 |

وحدة انتاجية يسيرها 10 عمال منهم 4 نساء و 6 رجال يراد تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة اعضاء.

1) ما احتمال ان تشمل اللجنة :
   ا) ثلاث نساء
   ب) على الاقل إمراتين
   ج) على الاكثر إمراتين
   د) على الاقل إمراة واحدة

25 |

يحتوي كيس على 20 قريصة مرقمة من 1 الى 20. نسحب من الكيس قريصتين في ان واحد

1) احسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقمهما يساوي 10
2) احسب احتمال سحب قريصتين الفرق بين رقمهما يساوي 4
3) احسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقمهما يساوي 10 علما ان الفرق بينهما يساوي 4

26

في دراسة خاصة لحالة سيارات مدينة معينة تبين ان :
12% من السيارات ذات مكابح ضعيفة من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20% منها لها اضاءة ضعيفة
من بين اليسارات ذات المكابح القوية هناك 8% منها لها اضاءة ضعيفة
لسلامة الطرقات طلب من شرطة مرور هذه المدينة تكثيف مراقبة السيارات
لتكن الحوادث التالية :
L : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها اضاءة قوية و $\overline{L}$ حادثتها العكسية
F : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها مكابح قويةو $\overline{F}$ حادثتها العكسية.

1) احسب $P(F)$ ، $P_F(\overline{L})$ ، $P_{\overline{F}}(\overline{L})$

2) احسب احتمال ان تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح ضعيفة و اضاءة ضعيفة ايضا

3) احسب احتمال ان تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح قوية و اضاءة ضعيفة ايضا

4) استنتج احتمال ان تكون السيارة الموقوفة ذات اضاءة ضعيفة

5) علما ان السيارة المراقبة لها اضاءة ضعيفة ما هو احتمال ان تكون ذات مكابح ضعيفة

6) برهن ان احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و اشاءة قوية) هو 0.8096

27

ليكن المنشور $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ حيث $x\in\mathbb{R}^*$

1) اكتب الحد الذي درجته 10

2) اوجد معامل الحد التاسع

3) اوجد الحد الثابت

28

ليكن X المتغير العشوائي المعرف كمايلي :

α	4	3	2	-1
$P(X=\alpha)$	a	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

1) عين قيمة العدد الحقيقي a

2) احسب $P(X\geq\frac{5}{2})$ ثم $P(X<1)$

3) احسب $P(X^2\leq 2)$

4) احسب $P(X^2-6X+8<0)$

29

يحتوي كيس على 4 كرات تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، a حيث $a\in\mathbb{N}$
نسحب كرة واحدة من الطيس. نضع P_k احتمال سحب الكرة ذات الرقم k (السحب ليس متساوي الاحتمال)

1) احسب P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a علما انها بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية اساسها $\frac{1}{18}$

2) ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل كرة مسحوبة بالرقم الذي تحمله. اوجد قيمة العدد الطبيعي a حتى يكون الامل الرياضياتي للمتغير F هو $E(F)=\frac{43}{9}$

30

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كمايلي : 4 كرات سوداء و 6 كرات بيضاء
نسحب من الصندوق 3 كرات في ان واحد. فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

1) كرة بيضاء

2) كرة بيضاء على الاقل

3) 3 كرات ليست من نفس اللون

نضيف الى هذا الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون

1) اثبت ان من اجل $n\in\mathbb{N}^*$:

$$X_n=(n+4)^2(n+6)$$

2) كم نضيف من كرة سوداء و بيضاء حتى يكون

$$X_n=2016$$

...

القسم III

مواضيع بكالوريات جزائرية

...

1 | شعبة علوم تجريبية

31 **علوم تجريبية - 2023 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

يحتوي صندوق U_1 على 5 كريات تحمل الارقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 3 و يحتوي صندوق U_2 على 4 كريات تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نختار عشوائيا احد الصندوقين و نسحب منه عشوائيا كريتين في ان واحد.

1) نعتبر الحوادث :

A " سحب كريتين تحملان رقمين فرديين " ،

B " سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين " ،

C " سحب كريتين احداهما تحمل رقما فرديا و الاخرى رقما زوجيا "

ا) انجز الشجرة التي تنمذج هذه التجربة

ب) بين ان $P(A) = \frac{23}{60}$ و $P(B) = \frac{1}{12}$ ثم احسب $P(C)$

2) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثم نسحب منه عشوائيا كريتين في ان واحد.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جداء الرقمين المسجلين عليهما.

ا) برر ان مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1; 2; 3; 4; 6\}$

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

32 **علوم تجريبية - 2023 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس، موزعة كمايلي : 3 كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 و 3 كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 و 4 كريات خضراء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من الكيس و نعتبر الحوادث A ، B ، C الاتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ،

B " الحصول على كرية خضراء على الاقل "

C " الحصول على كريتين تحملان رقمين زوجيين "

1) ا) بين ان احتمال الحدث A يساوي $\frac{4}{15}$ و ان احتمال الحدث B يساوي $\frac{2}{3}$

ب) احسب الاحتمالين $P(C)$ و $P(A \cap C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟

ج) استنتج احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون علما انهما تحملان رقمين زوجيين.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

ا) برر ان مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{2; 3; 4\}$

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

33 **علوم تجريبية - 2021 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

يراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاث رجال H_1 ، H_2 و H_3 و امراتان F_1 و F_2. نعتبر الحوادث A ، B و C حيث :

A : " عضوا اللجنة من نفس الجنس "

B : " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين "

C : " H_1 عضو في اللجنة "

1) ا) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب

ب) بين ان $P(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$

2) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل امكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة.

ا) برر ان مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$

ب) عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

34 **علوم تجريبية - 2021 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، مكتوب على كل منها سؤال واحد، منها ثلاث اسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1 ، 2 و 3 ، اربعة اسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 3 و 4 و سؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية :

A " سحب سؤال في الهندسة " ، B " سحب سؤال في التحليل " و C " سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا "

1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث A ، B و C على الترتيب.

2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

ا) برر ان مجموعة قيم X هي $\{1;2;3;4\}$

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ امله الرياضياتي

ج) استنتج قيمة $E(2021X+1442)$

35 **علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء، و يحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء و كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من احد الوعاءين بالكيفية التالية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة و مرقمة من 1 الى 6 ، اذا تحصلنا على احد الرقمين 3 او 5 نسحب الكريتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V نسمي A : الحدث : " الحصول على احد الرقمين 3 او 5 "

نسمي M الحدث :

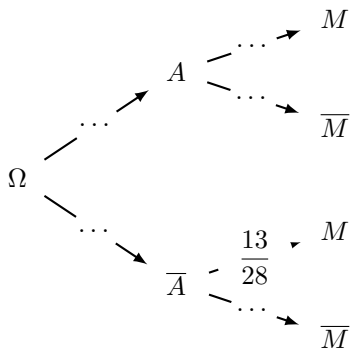
" الحصول على كريتين من نفس اللون "

1) تحقق ان $P(\overline{A})$ احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$

2) علما ان الكريتين المسحوبتين من U ، بين ان احتمال ان تكونا من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$

3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم اكملها و استنتج $P(M)$

4) احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السحب من الوعاء U علما ان الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللون؟



36 **علوم تجريبية - 2020 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

كيس به ثلاث كريات بيضاء و كريتين حمراوين لا نميز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية : اذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها الى الكيس و اذا كانت حمراء لا نعيدها الى الكيس.

1) ا) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم اكملها.

B يرمز الى الحصول على كرية بيضاء و R الى الحصول على كرية حمراء

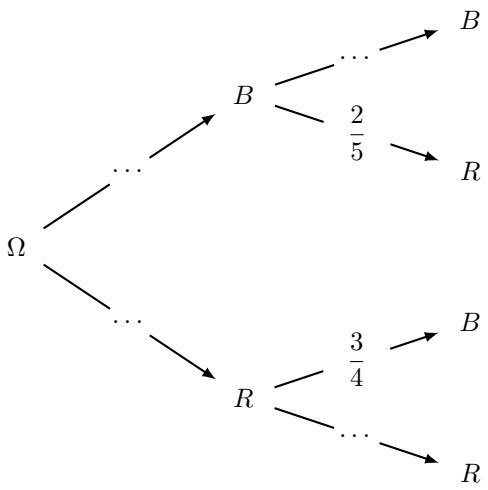
ب) احسب احتمال ان تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

ا) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X

ب) بين ان : $P(X=1)=\frac{27}{50}$ ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

ج) احسب $E(X)$ الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X



37 **علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها اربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات

خضراء منها اربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في ان واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث : A : "سحب كريتين من نفس اللون"، B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم".

1) بين ان احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B.

2) علما ان الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال ان تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

38 **علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الاخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من الصندوق.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الارقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

1) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

2) بين ان احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$

3) نسحب الان من الصندوق كريتين على التوالي دون ارجاع.

ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما ان جداءهما زوجي؟

39 **علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها اربع كريات بيضاء مرقمة بـ : 3،2،2،1 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 3،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 3،3،2

نسحب عشوائيا و في ان واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل الوان العلم الوطني"

و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم"

1) ا) احسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بين ان : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$. ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

...

2 | شعبة تقني رياضي

If you fail, never give up because F.A.I.L means"First Attempt In Learning". End is not the end. In fact, E.N.D means "Effort Never Dies". If you get No as an answer, remember No means "Next Opportunity

---

40 | تقني رياضي - 2023 - الموضوع الاول (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس، موزعة كما يلي :

3 كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 و 3 كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 1 ، 2

نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من الكيس و نعتبر الحوادث A ، B ، C الاتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " ،

B " الحصول على كرية حمراء على الاقل "

C " الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 3 "

1) ا) بين ان احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{4}$ و ان احتمال الحدث B يساوي $\frac{9}{14}$

ب) احسب الاحتمال $P(C)$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

ا) برر ان مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$

ب) عين قانون اجتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

41 | تقني رياضي - 2023 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كرية متماثلة و لا نفرق بينها باللمس، موزعة كمايلي :

3 كريات تحمل الرقم 0 ، 3 كريات تحمل الرقم 1 و 5 كريات تحمل الرقم 2

نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من الكيس و نعتبر الحوادث A ، B ، C الاتية :

A " الحصول على كريتين رقم كل منهما عدد اولي " ، B " الحصول على كرية واحدة تحمل رقما فرديا "

C " الحصول على كريتين جداء رقميهما معدوم"

1) ا) بين ان احتمال الحدث A يساوي $\frac{2}{11}$ و ان احتمال الحدث B يساوي $\frac{24}{55}$

ب) احسب الاحتمال $P(C)$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين جداء الرقمين المسجلين عليهما

ا) برر ان مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{0;1;2;4\}$

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

ج) احسب احتمال الحدث : "$e^{X+6} < 2023$"

42 | تقني رياضي - 2020 - الموضوع الاول (05 نقاط)

يحتوي كيس على اربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 2 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 3 ، 2 .

الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحدثين: A " الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم" و B " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون "

ا) احسب احتمال كل من الحدثين A و B

ب) بين ان احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم و مختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$

ج) استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم او مختلفتين في اللون.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحو بتين.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كريتين: اذا كان جداء رقميهما 4 يربح x^2 دينارا، اذا كان جداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينارا و اذا كان جداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. (x و y

عددان طبيعيان غير معدومين.)

عين قيمة كل من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة

43 | تقني رياضي - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

يحتوي كيس على كريتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 2 و اربع كريات بيضاء تحمل الارقام 2 ، 3 ، 3 ، 4. (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

1) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في ان واحد.

ا) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين :

A : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون "

B : " الحصول على كرية بيضاء على الاقل "

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب اكبر الارقام المحصل عليها

ا) بين ان: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) احسب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

2) نسحب الان 3 كريات على التوالي دون ارجاع.

ليكن C الحدث : " الحصول على 3 ارقام جداؤها عدد زوجي ".

احسب احتمال C.

44 | تقني رياضي - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)

توجد اجابة صحيحة واحدة من بين الاجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الاجابة الصحيحة مبررا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2.

(الكريات لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا و في ان واحد.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

1) قيم المتغير العشوائي X هي :

أ) $\{1;2;3\}$ ب) $\{0;2;3\}$ ج) $\{0;1;2\}$

2) الامل الرياضياتي $E(X)$ لـ X هو :

أ) $E(X)=\frac{4}{5}$ ب) $E(X)=\frac{6}{5}$ ج) $E(X)=\frac{11}{10}$

3) احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة"

يساوي :

أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ ج) $\frac{3}{5}$

4) احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الارقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1"

يساوي :

أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{5}$

45 | تقني رياضي - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على اربع كريات بيضاء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاث كريات حمراء 1 ، 2 ، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من هذا الكيس.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

ا) الحادثة A : "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

ب) الحادثة B : "الحصول على كريتين بيضاوين على الاكثر".

ج) الحادثة C : "الحصول على ثلاث كريات تحمل ارقاما غير اولية".

2) نعتبر المتغيرالعشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل ارقاما اولية.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب $P(X^2 - X \leq 0)$

46 | تقني رياضي - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

كيس به 7 كريات متماثلة، لا نفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء.
نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الكيس.

1) ا) احسب احتمال الحادثة A : "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

ب) احسب احتمال الحادثة B : "سحب كرتين من نفس اللون"

2) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).
فاذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، واذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ، واذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح او خسارة اللاعب بدلالة α.

ا) برر ان قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله.

ب) بين ان الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو : $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$
ثم اوجد اكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

...

3 | شعبة رياضيات

La gloire n'est pas de ne jamais tomber, mais de se relever chaque fois que l'on tombe

---

47 | **رياضيات - 2023 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس، منها كريتان حمراوان مرقمتان بـ : 2 ، -3 و خمس كريات بيضاء مرقمة بـ : 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، -2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 2

نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الحوادث A ، B ، C الاتية :

A " الحصول على 3 كريات من نفس اللون" ، B " الحصول على الالوان الثلاثة "

C " الحصول على 3 كريات مجموع ارقامها معدوم "

1) ا) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ثم بين ان : $P(C) = \frac{3}{20}$

ب) احسب $P(A \cap C)$ ثم استنتج $P_C(A)$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الالوان المتحصل عليها.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

3) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبارجاع

احسب احتمال الحصول على ثلاث كريات جداء ارقامها معدوم.

48 | **رياضيات - 2023 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

يحتوي صندوق U على كريتين حمراوين و كريتين خضراوين، و يحتوي صندوق V على كريتين حمراوين و ثلاث كريات خضراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من احد الصندوقين بالكيفية الاتية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة و مرقمة من 1 الى 10

اذا تحصلنا على عدد اولي نسحب الكريتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V

1) نعتبر الحوادث A ، B و C الاتية :

A " سحب كريتين حمراوين " ، B " سحب كريتين خضراوين " و C " سحب كريتين من لونين مختلفين "

ا) انجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.

ب) بين ان $P(A) = \frac{19}{150}$ و $P(B) = \frac{37}{150}$ ثم استنتج $P(C)$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين عدد الكرات الحمراء المتحصل عليها.

ا) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

ب) احسب احتمال الحدث : "$\ln X \leq 1$"

49 | **رياضيات - 2021 - الموضوع الأول (04 نقاط)**

كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

كل من الكريات الاثنتي عشر تحمل رقما من بين الاعداد التالية : 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس.

نرمز: P_i الى احتمال سحب كرية رقمها : i ، حيث:

$$p_4 = \frac{1}{4}\ p_3 = \frac{1}{4}\ p_2 = \frac{1}{6}\ ،\ p_1 = \frac{1}{3}$$

1) وزع الكريات الثنتي عشرة حسب الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 4

2) احسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C الاتية :

A " سحب كرية تحمل رقما فرديا "

B " سحب كرية تحمل رقما من ارقام نظام التعداد ذي الاساس 4"

C " سحب كرية رقمها حل للمعادلة : " $x^2 = 2^x$ "

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب لكرية الرقم الذي تحمله.

عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ امله الرياضياتي.

50 | رياضيات - 2021 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا له من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 ، H_3 و اربع نساء F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_4

1) بين ان عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42

2) نعتبر الحوادث الاتية :

A : " اللجنة من نفس الجنس "

B : " اللجنة من جنسين مختلفين "

C : " H_1 هو الرئيس "

E : " اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1"

ا) احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$

ب) احسب $P(C)$ و $P(E)$

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ امله الرياضياتي

51 | رياضيات - 2020 - الموضوع الأول (04 نقاط)

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء (كال الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث : اذا ظهرت كرية حمراء نعيدها الى الصندوق و نضيف له كرية بيضاء واذا ظهرت كرية بيضاء نعيدها الى الصندوق و نضيف له كرية حمراء، ثم نكرر العملية مرة ثانية.

1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم اكملها.

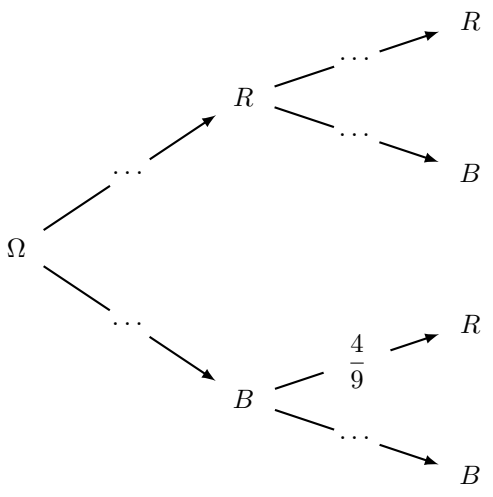
2) بين ان احتمال ان يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$

3) احسب احتمال ان يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الاقل

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي ياخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة بعد العملية الثانية.

ا) برر ان قيم المتغير العشوائي X هي : 5 ، 6 ، 7.

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب $E(X)$ امله الرياضياتي.



52 | رياضيات - 2020 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n \geq 2$)

و 4 كريات حمراء تحمل الاعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كرتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من هذا الصندوق.

1) ا) احسب احتمال كل من A و B حيث :

A : " سحب كريتين من نفس اللون " و B : " سحب كريتين تحملان نفس العدد علما انهما من نفس اللون "

ب) عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $P(A) = \frac{17}{55}$

2) نفرض في مايلي : $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد : $\cos(\alpha)\cos(\beta)$

ا) برر ان قيم المتغير العشوائي X هي : $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1.

ب) بين ان : $P(X=0) = \frac{27}{55}$

ج) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

53 | **رياضيات - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نرمي نردا غير مزيف ذا ستة اوجه مرقمة من 1 الى 6.
اذا ظهر الرقمان 2 او 4 نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من الصندوق U_2.
نعتبر الاحداث A ، B و C المعرفة بـ:
A: "نسحب كريتين حمراوين"
B: "سحب كريتين سوداوين" و
C : "سحب كريتين من لونين مختلفين".

1) انقل، و اكمل شجرة الاحتمالات.

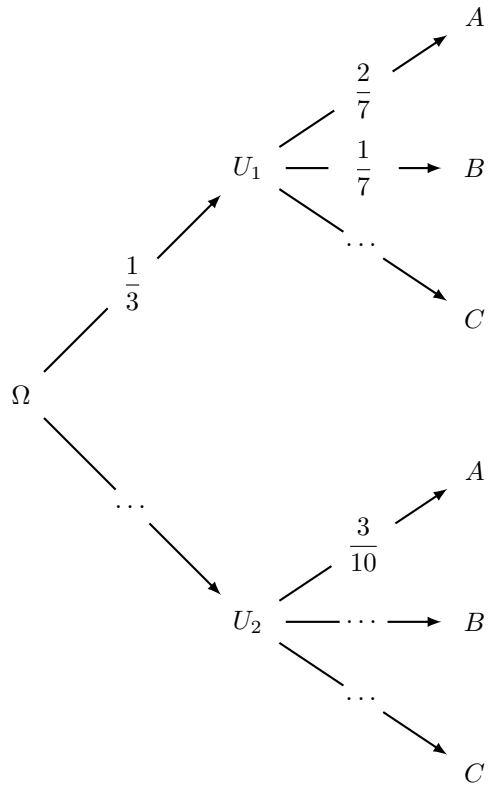
2) احسب احتمالات الاحداث A ، B و C.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

3) ا) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

4) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$



54 | **رياضيات - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كمايلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1،1،2،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3 ، 2 ، 3 وكرية بيضاء مرقمة بـ: -1 نسحب عشوائيا 4 كريات في ان واحد.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :
A : "الحصول على اربع كريات من نفس اللون"
B : "الحصول على كرية بيضاء على الاكثر"
C : " الحصول على اربع كريات مجموع ارقامها معدوم "

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج) احسب احتمال الحادثة : "$X^2 - X > 0$"

55 **رياضيات - 2009 - الموضوع الاول (05 نقاط)**

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات و في ان واحد.

ا) احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب) احسب احتمال الحصول على الاقل على كرية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب امله الرياضي $E(X)$

3) نسحب من الكيس في ان واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الاعادة (الإرجاع).
احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

...

القسم IV

مواضيع بكالوريات أجنبية

56 **بكالوريا تونس - 2018 -**

يقوم لاعب برمي زهر نرد غير مزيف حيث ان احد اوجهه يحمل الحرف G ، ووجهين يحملان الحرف R ، و ثلاث اوجه تحمل الحرف D

- اذا حمل الوجه العلوي للزهر حرف G فان اللاعب يربح $100DA$ وتنتهي اللعبة
- اذا حمل الوجه العلوي للزهر حرف R فان اللاعب لا يربح شيئا و تنتهي اللعبة.
- اذا حمل الوجه العلوي للزهر حرف D فان اللاعب يرمي للمرة الثانية فان حمل بعدها الوجه العلوي للزهر حرف G فان اللاعب يربح $50DA$ وتنتهي اللعبة، و ان حمل الوجه العلوي للزهر حرف R او D فان اللاعب لا يربح شيئا و تنتهي اللعبة.

نعتبر الاحداث التالية :

- G_1 : "اللاعب يربح $100DA$"
- G_2 : " اللاعب يربح $50DA$"

1) ا) احسب احتمال الحادثة G_1

ب) بين ان : $P(G_2)=\frac{1}{12}$

ج) استنتج ان حصول لاعب على ربح غير معدوم يساوي $\frac{1}{4}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل جولة لعب المبلغ المتحصل عليه خلالها.

ا) حدد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) احسب $E(X)$ متوسط ارباح اللاعب

3) نفرض ان 200 شخص قد شاركوا في هذه اللعبة، وليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق عدد اللاعبين الرابحين ربحا غير معدوم و $E(Y)$ متوسط اللاعبين الرابحين.

حدد معللا قيمة $E(Y)$

4) خصص المدير مبلغ $1200DA$ كمبلغ اجمالي ليتم توزيعه على الرابحين فهل اصاب المدير في تقديره هذا ام اخطأ؟

57 **بكالوريا المغرب - 2019 -**

يحتوي صندوق على عشر كرات : 3 منها خضراء و 6 منها حمراء و 1 سوداء، لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق.

نعتبر الاحداث التالية :

- A : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "
- B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "
- C : " الحصول على كريتين على الاقل من نفس اللون. "

1) بين ان : $P(A)=\frac{1}{120}$ و $P(B)=\frac{7}{40}$

2) احسب $P(C)$

58 **بكالوريا المغرب، الدورة الاستدراكية - 2018 -**

يحتوي صندوق على 12 كرة لا يمكن التمييز بينها باللمس موزعة كمايلي : 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 1 و 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 2 و 6 كرات خضراء تحمل كل واحدة منها العدد 2

نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الصندوق، و نعتبر الاحداث التالية :

A : "الحصول على كرتين تحملان نفس العدد" و B : "الحصول على كرتين مختلفتي اللون" و C : "الحصول على كرتين تحملان عددين مجموعهما يساوي 3"

1) بين ان $P(A)=\frac{13}{22}$ و $P(B)=\frac{6}{11}$ و احسب $P(C)$

2) ا) بين ان $P(A\cap B)=\frac{3}{11}$

ب) هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ علل جوابك.

3) علما ان الحدث B محقق، احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس العدد.

59 **بكالوريا المغرب - 2017 -**

يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل الارقام الاتية : 4 ، 2 ، 2 ، 2 ، 2 ، 1 ، 0 ، 0. نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) نعتبر الاحداث :

- A : " من بين الكرات المسحوبة لا توجد اية كرة تحمل الرقم 0"
- B : " جداء الاعداد التي تحملها الكرات المسحوبة يساوي 8"

بين ان : $P(A)=\frac{5}{14}$ و $P(B)=\frac{1}{7}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الارقام التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة

ا) بين ان : $P(X=16)=\frac{3}{28}$

ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

60

بكالوريا المغرب - 2015 -

يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات: 4 حمراء و 3 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس) و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات : 3 حمراء و 2 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس)

1) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا 3 كرات و في ان واحد من الصندوق U_1.
ليكن A الحادث "الحصول على كرة حمراء واحدة وكرتين خضراوين" و B الحادث "الحصول على 3 كرات من نفس اللون".
بين ان $P(A)=\frac{12}{35}$ و ان $P(B)=\frac{1}{7}$

2) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2
ليكن C الحادث "الحصول على 3 كرات حمراء".
بين ان : $P(C)=\frac{6}{35}$

61

بكالوريا فرنسا - 2008 -

يحتوي كيس A على 4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء(لا نفرق بينها باللمس). ويحتوي كيس اخر B على كرة حمراء و 9 كريات سوداء.(الكريات لا نفرق بينها باللمس). يرمي اللاعب زهرة نرد متوازنة مرقمة من 1 الى 6 مرة واحدة اذا تحصل على 1 يسحب عشوائيا كرية من الكيس A والا فانه يسحب عشوائيا كرية من الكيس B

1) ليكن R الحادث " الحصول على كرية حمراء". اثبت ان $P(R)=0.15$

2) اذا تحصل اللاعب على كرية حمراء. هل احتمال ان تكون من الكيس A اكبر او تساوي من احتمال ان تكون من الكيس B

الجزء الثاني

يعيد اللاعب التجربة الموصوفة سابقا مرتين في نفس الظروف و بطريقة مستقلة.
ليكن x عدد طبيعي غير معدوم.
في كلا التجربتين اللاعب يربح x دينار اذا تحصل على كرية حمراء و يخسر 2 دينار اذا تحصل على كرية سوداء.
ليكن G المتغير العشوائي الذي يمثل ربح او خسارة اللاعب.

1) برر ان قيم المتغير العشوائي G هي $2x$ ، $x-2$ ، -4 ثم عرف قانون احتماله G

2) عبر عن الامل الرياضياتي $E(G)$ بدلالة المتغير x ما هي القيمة التي ياخذه x حتى يكون $E(G)\geq 0$ ؟

62

بكالوريا المغرب - 2009 - شعبة علوم رياضية (الدورة الاستدراكية)

n عدد طبيعي حيث $n\geq 4$ لدينا قلاق صناديق U_1 ، U_2 و U_3
الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء
الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء
الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء
نعتبر التجربة العشوائية التالية :
نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ثم نسحب و في ان واحد كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاحتيار
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عد الكرات الحمراء المسحوبة

1) حدد القيم الممكنة لـ X

2) ا) بين ان : $P(X=2)=\frac{8}{3n(n-1)}$ و ان : $P(X=1)=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

ب) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X

3) علما اننا حصلنا على كرتين حمراوين ما احتمال ان يكون السحب قد تم من الصندوق U_3

63

بكالوريا المغرب - 2022 - شعبة علوم تجريبية

يحتوي كيس على عشر كرات، ثلاث كرات بيضاء و ثلاث كرات خضراء و اربع كرت حمراء، لا يمكن التمييز بينها باللمس.
نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق

1) بين ان: $P(A)=\frac{1}{6}$ حيث A هو الحدث " عدم الحصول على اي كرة حمراء"

2) احسب $P(B)$ حيث B هو الحدث "الحصول على ثلاث كرات بيضاء او ثلاث كرات خضراء"

3) بين ان : $P(C)=\frac{1}{2}$ حيث C هو الحدث "الحصول على كرة حمراء واحدة بالضبط"

4) احسب $P(D)$ حيث D هو الحدث "الحصول على كرتين حمراوين على الاقل"

...

القسم V

مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس اشبال الامة

...

4 | شعبة علوم تجريبية

64 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2023 - الموضوع الاول (04 نقاط)**

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث : يحتوي الصندوق U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1. كما يحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ 0 ، 1. كل الكريات متماثلة و لانفرق بينها عند اللمس.

1) نختار عشوائيا احد الصندوقين، فاذا كان الصندوق U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون ارجاع و اذا كان الصندوق U_2 نسحب منه كريتين و في ان واحد

ا) احسب احتمال الحدثيين التاليين :

A : " سحب كريتين من نفس اللون " و

B : " سحب كريتين مجموع رقميهما عدد زوجي "

ب) هل الحدثان A و B مستقلان؟ برر اجابتك

2) اذا علمت ان الكريتين المسحوبتين مجموع رقميهما عدد زوجي، فما احتمال ان تكونا من الصندوق U_1 ؟

3) ناخذ الكريات الموجودة في الصندوق U_1 و U_2 و نضعها جميعا في صندوق واحد U_3 ، ثم نسحب منه عشوائيا 3 كريات في ان واحد و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الارقام الظاهرة على الكريات المسحوبة

ا) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$

65 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2023 - دورة سبتمبر ،الموضوع الثاني (04 نقاط)**

تعرض شركة لصنع السيارات تخفيضات تشمل ثلاث اصناف من السيارات A ، B و C ، حيث تنتج 25% من الصنف A ، و 45% من الصنف B و الباقي من الصنف C ، حيث تخضع للتخفيض 35% من الصنف A ، و 70% من الصنف B و 10% من الصنف C

يختار الزبون سيارة عشوائيا.

لتكن الاحداث التالية

A " السيارة من الصنف A "

B " السيارة من الصنف B "

C " السيارة من الصنف C "

S " السيارة خاضعة للتخفيض "

1) نمذج هذه الوضعية بمخطط

2) احسب $P(A)$ احتمال ان تكون السيارة من الصنف A

3) احسب $P(\overline{B})$ احتمال ان تكون السيارة من الصنف B

4) احسب $P(S)$ احتمال ان تكون السيارة خاضعة للتخفيض

5) علما ان السيارة غير خاضعة للتخفيض، ما هو احتمال ان تكون من الصنف A

66 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2022 - دورة سبتمبر ،الموضوع الاول (04 نقاط)**

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الارقام : 2 ، 2 ، 3 و يحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها اربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 و خمس كريات حمراء تحمل الارقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 (الكريات لا يمكن التمييز بينها باللمس) نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 و نسجل رقمها و ليكن n.

اذا كان $n = 2$: نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي من دون ارجاع

اذا كان $n = 3$: نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2

- نعتبر الحدثين التاليين: A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون "

B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم "

1) ا) بين ان : $P(A)=\frac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$ احتمال الحدث B

ب) بين ان : $P(A\cap B)=\frac{55}{378}$ ، ثم استنتج : $P_A(B)$

ج) هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل اجابتك

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2

- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

67 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2022 - دورة سبتمبر ،الموضوع الاول (04 نقاط)

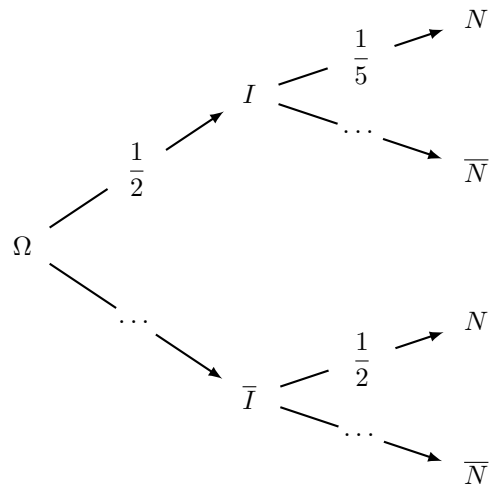
يحتوي صندوق على اربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس)

نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 الى 6 ، اذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و اذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق، بعد ذلك يسحب اللاعب في ان واحد ثلاث كريات من الصندوق

نعتبر الاحداث التالية :

I : "الرقم الظاهر فردي"

N : " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء "



1) احسب الاحتمالات : $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\overline{I}}(N)$ ، $P(N\cap I)$

ا) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم اكملها

ب) بين ان : $P(N)=\frac{7}{20}$

2) علما ان الكريات المسحوبة كلها سوداء، ما احتمال ان يكون الرقم الظاهر زوجيا؟

68 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2021 - دورة سبتمبر ،الموضوع الاول (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء، كل الكرات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس.

1) نسحب من الكيس ثلاث كرات في ان واحد :

احسب احتمال كل حادثة من الاحداث التالية:

A : " الكرات المسحوبة كلها حمراء " ، B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب "

C " توجد على الاقل كرة واحدة بيضاء في السحب " ، D " الكرات المسحوبة من الوان مختلفة مثنى مثنى "

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها n كرة خضراء حيث : $(n\geq 2)$ ، ثم نسحب كرتين منه على التوالي و بدون ارجاع.

- نفرض ان سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة و سحب كرة خضراء يساوي $(+5)$ نقطة.

- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها :

ا) اكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

ب) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة

ج) كيف نختار عدد الكرات الخضراء حتى تكون اللعبة مربحة؟

69 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2021 - دورة سبتمبر ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على اربع كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء و كرتين حمراوين (لانفرق بينها عند اللمس).

نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) احسب احتمالات الاحداث التالية :

A : " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء " B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

C : " سحب كرة بيضاء واحدة على الاقل "

2) ا) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الالوان المحصل عليها.

- عين قيم المتغير العشوائي X
- بين ان : $P(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $P(X=2)$ و عين قانون احتمال X

ب) نقترح اللعبة التالية : يدفع اللاعب مبلغ $50DA$ قبل اجراء السحب. و يكسب $25DA$ لكل لون من الالوان المحصل عليها.

- هل اللعبة مربحة له؟

70 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة سبتمبر ،الموضوع الاول (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على اربع كرات سوداء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات حمراء، الكرات لا نميز بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق.

1) احسب احتمال الاحداث التالية :

A : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " ، B : " سحب كرة سوداء واحدة على الاقل "

C : " سحب كرتين حمراوين و كرة بيضاء "

2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الالوان المحصل عليها.

ا) حدد القيم الممكنة التي ياخذها المتغير العشوائي X

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

3) نعتبر صندوق اخر U_2 يحتوي على كرتين سوداوين و كرة حمراء واحدة. نضع الكرات المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ، ثم نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من U_2

- احسب احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 سوداوين علما ان الكرات الثلاثة من U_1 لها نفس اللون.

71 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة سبتمبر ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر زهرتي نرد كل منهما مرقم من 1 الى 6 ، زهرتي النرد متطابقان في المظهر لكن احدهما مزيف و الاخر غير مزيف.
احتمال ظهور الرقم 6 بالنسبة للمزيف يساوي $\frac{1}{3}$

1) نرمي زهرة النرد الغير مزيف ثلاث مرات على التوالي و نرمز بـ X للمتغير العوشائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الرقم 6.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) تحقق ان $P(X=2)=\frac{5}{72}$

ج) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب امله الرياضياتي

2) نختار عشوائيا احد زهري النرد، ثم نرمي زهرة النرد المختارة ثلاث مرات على التوالي

نعتبر الحادثتين التاليتين :

A : " الحصول على الرقم 6 مرتين بالضبط." B : " زهر النرد المختار هو زهر النرد الغير مزيف"

مستعينا بشجرة الاحتمالات احسب $P(B \cap A)$ و $P(\overline{B} \cap A)$ ثم استنتج ان $P(A)=\frac{7}{48}$

3) تحصلنا على الرقم 6 مرتين بالضبط ما هو احتمال ان يكون زهر النرد المختار مزيف.

72 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2019 - دورة ماي ،الموضوع الاول (04 نقاط)

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3 خضراء نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1) ماهو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟

2) نرمز بـ $P(n)$ الى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

ا) أثبت أن : $P(n)=\frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة.

3) نضع $n=4$ يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثم يرجعهما و يسحب كرتين أخريين. لإجراء هذين السحبتين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 دينارا وبعد كل سحب يتحصل على 40 دينارا اذا كانت الكرتان من نفس اللون، و إلا يتحصل على 5 دنانير فقط.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبين ربح هذا اللاعب.

ا) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ج) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

73 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2019 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 3 و اربعة حمراء الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و خمس خضراء تحمل الارقام : 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3 .
نسحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحادثتين : A : " سحب كرتين من نفس اللون" و B : " سحب كرة خضراء على الاقل " .

ا) أحسب احتمال الحوادث التالية : A ، B و $A \cap B$.

ب) هل الحادثتين : A و B مستقلتان؟

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

74 | بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2018 - دورة ماي ،الموضوع الاول (04 نقاط)

تتكون مجموعة اشخاص من ثمانية رجال و اربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه علي و امرأة واحدة اسمها فاطمة نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث اعضاء لهم نفس المهام.

1) احسب احتمال كل من الاحداث التالية
A : "تكوين لجنة تضم 3 رجال" B : "تكوين لجنة تضم رجلا و امراتين"
C : "تكوين لجنة تضم علي" D : "تكوين لجنة تضم اما علي و اما فاطمة"

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة

ا) عين القيم الممكنة التي ياخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

75 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2018 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من بين مجموعة اللاعبين لدينا $\frac{5}{6}$ لاعبين باليد اليمنى و $\frac{1}{6}$ لاعبين باليد اليسرى احتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعبين باليد اليمنى هو $\frac{1}{4}$ و بالنسبة للاعب لليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$

1) نختار لاعبا و نسمي الحادثتين
G : "لاعب باليد اليسرى" ، S : "اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

ا) احسب احتمال الحادث $G \cap S$

ب) احسب احتمال الحادث S

ج) احسب احتمال الحادث ان يكون الاعب باليد اليمنى علما انه وضع الكرة داخل الدلو

2) في هذال السؤال نسمي عمر اللاعب باليد اليمنى انه يرمي كرتين واحدة بعد الاخرى(بفرض الرميتين مستقلتين)
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بعدد الكرات داخل الدلو المكونة

ا) عين القيم الممكنة التي ياخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله

ب) احسب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

...

5 | شعبة رياضيات

76 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2023 - دورة ماي ،الموضوع الأول (04 نقاط)**

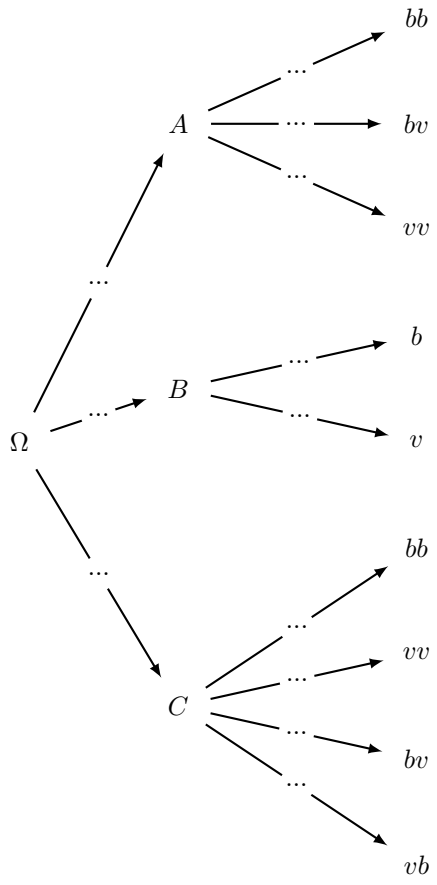
كيس يحتوي على 10 كريات متماثلة لا نميز بينها باللمس 4 منها خضراء و 6 بيضاء

نرمي زهرتي نرد غير مغشوشين اذا تحصلنا على وجهين يحملان رقما زوجيا نسحب من الكيس كرتين في ان واحد، اذا تحصلنا على وجهين يحملان رقما فرديا نسحب كرة واحدة اما في بقية الحالات نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع. لتكن الاحداث التالية :

A " الحصول على وجهين يحملان رقم زوجي"

B " الحصول على وجهين يحملان رقم فردي "

C " الحصول على وجهين يحملان رقم فردي و الاخر زوجي "



1) احسب $P(A)$ و $P(C)$

2) علما ان C قد وقع ما هو احتمال الحصول على كرتين مختلفتين في اللون

3) انقل ثم اتمم جرة احتمال (مرفقة بطريقة الحساب)

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات الخضراء المسحوبة

ا) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون احتمال X ثم احسب امله الرياضياتي

77 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2022 - دورة ماي ،الموضوع الأول (04 نقاط)**

في لعبة حظوظ الربح هي نفس حظوظ الخسارة في شوطها الاول، و نقبل انه اذا ربح اللاعب شوطا في هه اللعبة فان احتمال ربح الشوط الموالي له هو 0.4 واذا خسر شوطا فان احتمال خسارة الشوط الموالي له هو 0.8

n عدد طبيعي غير معدوم، G_n الحادث : " يربح الشوط رقم n " و P_n الحادث :" يخسر الشوط رقم n "

1) احسب $P(G_1)$ ، $P_{G_1}(G_2)$ و $P_{P_1}(G_2)$ ثم استنتج $P(G_2)$

2) احسب $P(P_2)$

3) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$x_n = P(G_n) \text{ و } y_n = P(P_n)$$

ا) عين من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_{G_n}(G_{n+1})$ و $P_{P_n}(P_{n+1})$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.4x_n + 0.2y_n \\ y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n \end{cases}$$

ج) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :
$v_n = x_n + y_n$ و $w_n = 6x_n - 2y_n$
بين ان المتتالية (v_n) ثابتة و (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها العام

د) استنتج عبارة x_n بدلالة n ثم عين نهاية (x_n). ماذا تستنتج؟

78 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2022 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

1) يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 سوداء و الباقي بيضاء.
نسحب من هذا الكيس عشوائيا 3 كرات في ان واحد.
ماهو احتمال الاحداث التالية :
A : " الحصول على كرتين سوداوين بالضبط "
B : " الحصول على كرة بيضاء على الاقل "
C : " الحصول على 3 كرات مختلفة اللون "

2) نضيف للكيس n كرة سوداء و n كرة بيضاء حيث n عدد طبيعي غير معدوم. نسحب كرتين في ان واحد و ليكن X_n عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين من نفس اللون.

ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
$X_n = n^2 + 9n + 21$

ب) كم نضيف من كرة حتى يكون : $X_n = 10713$

79 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2021 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على ارع كريات بيضاء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4.
لا نفرق بينها عند اللمس.
نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون ارجاع.

1) ماهو عدد الحالات الممكنة للسحب

2) احسب احتمال سحب كريتان تحملان من نفس اللون

3) احسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان

4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة

ا) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$

80 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة ماي ،الموضوع الأول (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كرة واحدة من هذا الصندوق و نسجل لونها، ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة و نسجل لونها و ننهي التجربة.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :
A : " الحصول على كرتين بيضاوين "
B " الحصول على كرتين من نفس اللون "

2) نعرف لعبة حظ كما يلي : تمنح لكل كرة بيضاء العلامة α حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، و لكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$
ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.

ا) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب امله الرياضي $E(X)$

ب) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون اللعبة مربحة.

3) نضيف $(n-3)$ كرة سوداء الى الصندوق و نعيد عملية السحب المعرفة اعلاه.
ما هو عدد الكرات السوداء التي تم اضافتها الى الصندوق علما ان احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$

81 بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الارقام : 2 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 وكرتين سوداوين تحمل الارقام : 1 ، 0 (لا نميز بينها باللمس) نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الكيس

1) احسب احتمال كل من الاحداث التالية :
A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون "
B : " للكرتين المسحوبتين نفس الرقم "
C : " للكرتين المسحوبتين لونين مختلفين و رقمين مختلفين "
D : " جداء الرقمين المسجلين على الكرتين معدوم "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل عملية سحب للكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

ا) اوجد قانون الاحتمال للمتغير X

ب) احسب الامل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير X

82 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2019 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)**

يحتوي كيس على اربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 و اربع كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2. نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

1) احسب احتمال الحصول على :

ا) ثلاث كرات من نفس اللون

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم

ج) ثلاث كرات ارقامها مختلفة مثنى مثنى

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1

ا) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب) أحسب الامل الرياضي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

83 **بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2018 - دورة ماي ،الموضوع الأول (04 نقاط)**

عمر و حمزة راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق (C-B-A)

نفرض ان كل رامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط. اذا علمت ان :

-احتمالات اصابة الرامي عمر المناطق (C-B-A) على الترتيب هو $\left(\frac{7}{12}، \frac{1}{3}، \frac{1}{12}\right)$

- احتمالات اصابة الرامي حمزة المناطق (C-B-A) متساوية.

1) الرامي عمر يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

ا) ما احتمال ان يصيب في كل رمية المنطقة (C) ؟

ب) ما احتمال ان يصيب المناطق (C-B-A) بهذا الترتيب؟

ج) ما احتمال ان يصيب المناطق (C-B-A) ؟

2) نختار احد الراميين مع العلم ان احتمال اختيار الرامي عمر ضعف احتمال اختيار الرامي حمزة

ا) في حالة تسديد رمية واحدة. ما احتمال ان تصيب هذه الرمية المنطقة (C) ؟

ب) علما ان رمية واحدة قد سددت و اصابت المنطقة (C) ، ما احتمال ان تكون هذه الرمية للرامي عمر؟

...

القسم VI

تمارين مقترحة للتعمق

84

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم المحصل عليه زوجي سمح له برمية اخرى. تنتهي اللعبة اجباريا بعد 10 رميات او بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا.

1) ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى.

2) ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية

3) اذا اراد اللاعب ان يكون احتمال حصوله على رقم فردي اكبر من 0.03 فما هو عدد الرميات التي لا ينبغي تجاوزها.

85

A و B صندوقان يحتويان على كرات موزعة كمايلي:
الصندوق A : 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء
الصندوق B : 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A و نسجل لونها و نعيدها الى الصندوق B ثم نسحب من الصندوق B كرة اخرى و نسجل لونها

1) ماهو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

2) ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

3) نرفق بكل كرة بيضاء العدد الحقيقي α وكل كرة سوداء العدد $(-\alpha)$ وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الاعداد المرقمة بها.

ا) عرف قانون احتمال المتغير X ثم احسب $E(X)$ (أمله الرياضياتي).

ب) عين α حتى يكون $E(X)=1$

4) نضيف الى الصندوق B $(n-3)$ كرة سوداء حيث n عدد طبيعي اكبر من 3 نعيد عملية السحب كما في السؤال (1).

ا) ماهو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

ب) عين قيمة n حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0.25

86

لدينا وعائين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس. الوعاء U_1 يحتوي على n كرية بيضاء و 3 كرات سوداء (n عدد طبيعي اكبر من او يساوي 1)
الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء
نقوم بالتجربة E : "نسحب عشوائيا كرة من U_1 ونضعها في U_2 ، ثم نسحب كرة من U_2 ونضعها في U_1 "

1) نعتبر الحادثة A : "بعد التجربة E يبقى الوعاءان على ماكانا عليه "

ا) بين ان الاحتمال $P(A)$ للحادثة A يكتب :

$$P(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

ب) عين نهاية $P(A)$ لما n يؤول الى $+\infty$

2) نعتبر الحادث B : "بعد التجربة E الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط "

تحقق من ان : $P(B)=\dfrac{6}{4(n+3)}$

3) لاعب يدفع 20 دينارا و يقوم بالتجربة E :

ا) اذا كان بعد التجربة، الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء، اللاعب يكسب $2n$ دينار

ب) اذا كان الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين، فان اللاعب يكسب n دينار.

ج) اذا كان الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء، فان اللاعب لا يكسب شيئا.

د) اشرح لماذا لا يكون للاعب اي ربح اذا كان n لا يفوق 10؟

87

1) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_n=\dfrac{2}{5}u_{n-1}+\dfrac{1}{5} \end{cases} \quad n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$$ كل اجل من

ا) برهن ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان $u_n\in[0;1]$

ب) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=u_n-\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$
عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية.

ج) احسب u_n بدلالة n ثم استنتج ان u_n متقاربة و عين نهايتها

2) A و B كيسان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :
الكيس A : 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء
الكيس B : 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء
نختار عشوائيا كيسا واحدا و نسحب منه كرة واحد ثم نعيدها الى نفس الكيس

اذا كانت هذه الكرة بيضاء نسحب مرة اخرى من نفس الكيس اما اذا كانت سوداء فنسحب من الكيس الاخر و نعيد هذه التجربة n مرة.
ليكن u_n احتمال ان تكون السحبة رقم n من الكيس A

ا) احسب u_1 ، u_2 ، u_3

ب) برهن ان من اجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$:

$$u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$$

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

88

A، B ، C ثلاث صناديق تحتوي على كرات موزعة كمايلي :
في الصندوق A : 5 كرات بيضاء و كرة سوداء
في الصندوق B : 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء
في الصندوق C : كرة بيضاء و 4 كرات سوداء
يقوم لاعب برمي زهرة نرد ذات 6 اوجه مرقمة و متساوية الاحتمال.
اذا كان الرقم الظاهر هو 1 يسحب من الصندوق A
اذا كان الرقم الظاهر 2 او 3 يسحب من الصندوق B
اذا كان الرقم الظاهر 4 او 5 او 6 يسحب من الصندوق C

1) اذا كان اللاعب يسحب كرة واحدة فقط، احسب احتمال ان تكون بيضاء.

2) اذا كان اللاعب يسحب كرتان في ان واحد. احسب احتمال الحوادث التالية :
X : كرتين بيضاوين.
Y : كرتين سوداوين من الصندوق B

89

يحتوي كيس على عشر كريات بحيث : خمس كريات حمراء تحمل على الترتيب الارقام -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 و ثلاث كريات خضراء تحمل على الترتيب الارقام -1 ، 0 ، 1 وكرتان سودوان تحملان على الترتيب الرقمين -1 ، 0

1) نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من هذا الكيس ونفترض ان كل الكريات لها نفس احتمال السحب.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرافق كل سحبة ممكنة بالعدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس.

ا) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب) اكتب قانون احتمال X ثم احسب امله الرياضياتي

2) نعيد كل الكريات المسحوبة الى الكيس و نسحب منه كريتين دون ارجاع

ا) احسب عدد الحالات الممكنة للسحب

ب) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ، حيث الحدثان A و B معرفان كمايلي :

A : " الكرتان المسحوبتان لوناما مختلفان

B : " الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما "

90

كيس يحتوي على كرتين بيضاء مرقمة بـ: 2 ، 3 و ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 3 ، 3 واربع كرات سوداء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 ، 3.

1) نسحب في ان واحد كرتين من الكيس.

ا) احسب احتمال وقوع الحوادث التالية :
A : "ظهور كرتين من لونين مختلفين".
B : "ظهور رقمين فرديين على الاكثر".
C : "ظهور عددين مجموع رقميهما عدد اولي".

ب) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين الظاهرين.
- عين قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي و الامل الرياضياتي ثم الانحراف المعياري.

2) نعتبر الكيس الاول و كيس اخر يحتوي كرتين بيضاوين مرقمة بـ: 1 ، 1 وكرتين حمراوين مرقمة بـ: 1 ، 3 وكرتين سوداوين مرقمة بـ: 2 ، 2.
نرمي حجر نرد مرقم من 1 الى 6 مرة واحدة فعند ظهور عدد فردي نسحب كرة من الكيس الاول و عند ظهور عدد زوجي نسحب كرة من الكيس الثاني.
- بين ان احتمال ظهور كرة بيضاء هو : $P(B) = \frac{5}{18}$.
- علما ان الكرة المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال ان تكون من الكيس الثاني؟