أفكار المتتاليات

رتبة الحد = رتبة الحد الأخير - رتبة الحد الأول + 1

$18 = x - 0 + 1$

$18 = x + 1 \Rightarrow x = 10$

- الحد الذي رتبته 18 هو U_{10}

* القيمة:

نعوض في عبارة الحد العام $U_{10} =$

$U_n = 2 + 3r \Rightarrow U_{10} = 2 + 3(10)$

$U_{10} = 32$

Ex 02 = من الجملة

(U_n) متتالية حسابية، حدها الأول U_0 أساسها

لـ عبارة الحد العام.

$U_n = U_0 + nr$

* لـ إيجاد U_0 و r:

لدينا: $U_3 = 3$; $U_6 = 9$

نعوض في عبارة الحد العام

$U_6 = U_0 + 6r$; $U_3 = U_0 + 3r$

$$\begin{cases} U_0 + 3r = 3 \quad /\times(-1) \quad \text{--- ①} \\ U_0 + 6r = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -U_0 - 3r = -3 \\ U_0 + 6r = 9 \end{cases} \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{2}$$

$r = 2$ بتعويض في ①:

$U_0 + 6 = 3 \Rightarrow U_0 = 3 - 6$

$U_0 = -3$

لـ عبارة الحد الأول هو:

$U_n = -3 + 2n$.

* لـ: هل الحد 37 حد من حدود المتتالية

ما رتبته؟ متتالية

$-3 + 2n = 37$ خوارزمية حل معادلة = $U_n = 37$; n ؟

من الجملة

Ex 01:

(U_n) متتالية حسابية: حدها الأول $U_0 = 2$

- العلاقة $U_2 + U_7 = 25$.

① تعيين أساس المتتالية الحسابية U_n؟

لـ كتابة عبارة الحد العام:

$U_n = U_0 + (n-0)r$

$U_n = 2 + nr$.

عبارة الحد العام. $\leftarrow$ ؟ $U_n = 2 + nr$

العلاقة =

- $U_2 + U_7 = 25$

$$\begin{cases} U_2 = (2 + 2r) \\ U_5 = (2 + 5r) \end{cases}$$

نعوض في عبارة الحد العام:

إذن:

$(2 + 2r) + (2 + 7r) = 25$

$4 + 7r = 25$

$7r = 25 - 4 \Rightarrow 7r = 21$

$r = \frac{21}{7}$

$r = 3$

---

② - كتابة الحد العام U_n بدلالة n.

- أكتب U_n بدلالة n.

- أثبت أن: $U_n = 2 + 3n$

هكذا يصاغ سؤال عبارة الحد العام.

فكرة:

أحسب قيمة الحد الذي رتبته 18.

$U_0 + U_1 + \cdots + U_?$

رتبة 18 هي:

$n = \frac{40}{2}$; $n = 20$ ومنه $2n = 40$

$U_{20} = -3 + 2(20) = 37$ إذن : $U_{20} = 37$

الحد الذي رتبته n هو :

$20 - 0 + 1 = \boxed{21}$

U_{20} الحد الذي رتبته $2n$

فكرة : BAC 2017 SC

- البرهان بالتراجع أن (U_n) متتالية متزايدة تماما و (V_n) متتالية متناقصة تماما.

$\left.\begin{array}{l} U_{n+1} - U_n > 0 : \text{متتالية متزايدة معناه} \\ V_{n+1} - V_n < 0 : \text{متتالية متناقصة معناه} \end{array}\right\}$

البرهان :

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع الخاصية :

$P(n) : U_{n+1} - U_n > 0$ و $V_{n+1} - V_n < 0$

من أجل $n = 0$:

$U_1 = \frac{7}{4}$ و $U_0 = 1$ إذن :

$U_1 - U_0 = \frac{3}{4}$ ومنه : $U_n - U_0 > 0$

من جهة أخرى :

$V_0 = 6$ و $V_1 = \frac{11}{2}$ إذن :

$V_1 - V_0 = -\frac{1}{2}$ ومنه $V_1 - V_0 < 0$

ومنه $P(0)$ محققة .

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل n كيفي حيث :

$U_{n+1} - U_n > 0$ و $V_{n+1} - V_n < 0$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، حيث :

$U_{n+2} - U_{n+1} > 0$ و $V_{n+2} - V_{n+1} < 0$

من فرضية التراجع لدينا :

$V_{n+1} - V_n < 0$ و $U_{n+1} - U_n > 0$

$\frac{3}{4}(V_{n+1} - V_n) < 0$ و $\frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n) > 0$

ومنه :

$V_{n+2} - V_{n+1} < 0$ و $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$

ومنه $P(n+1)$ محققة .

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_{n+1} - U_n > 0$ و $V_{n+1} - V_n < 0$ ومنه (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و (V_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

+ فكرة المتتاليات المتجاورة في BAC

تشرح نهاية الفرق بين V_n و U_n تساوي 0 أي :

$\lim_{n \to +\infty} [U_n - V_n] = 0$

و

(U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و (V_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

تشرح

Note :

كي نتفادى الخوارزمية الأساسية ويجيبنا طبعا ولكن يقلنا طبيعة المتتالية واش هي نستعمل هذه الطريقة :

متتالية هندسية حدها : نقيم U_0 ، U_1 ، U_2 ... نلقاو نفس الثابت

متتالية حسابية نطرح : نطرح U_0 ، U_1 ، U_2 ... نلقاو نفس ثابت

الأفكار التي صادفتها في حل تمارين المنطق:

تذكير RAC وBAC

فكرة 1 =

لإثبات أن (U_n) متتالية هندسية، نحاول إيجاد q حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ ثم حساب حدها الأول V_0

لتكون V_n متتالية هندسية، نجيب:

$V_{n+1} = q \cdot V_n$.

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + \alpha}{U_{n+1} + 1}$$

$$= \frac{3 - \frac{4}{U_n + 2} + \alpha}{3 - \frac{4}{U_n + 2} + 1}$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{3U_n + 6 - 4 + \alpha U_n + 2\alpha}{U_n + 2}}{\frac{3U_n + 6 - 4 + U_n + 2}{U_n + 2}}$$

$$= \frac{(3+\alpha)U_n + 2\alpha + 2}{4(U_n + 1)} = \frac{(3+\alpha)}{4} \cdot \frac{U_n + \frac{2\alpha+2}{3+\alpha}}{U_n + 1}$$

حتى تكون V_n متتالية هندسية نجيب:

$\frac{2\alpha+2}{3+\alpha} = \alpha$ ومنه $\rightarrow$

$\frac{2\alpha + 2 - 3\alpha - \alpha^2}{3\alpha} = 0$ أي $\frac{2\alpha+2}{3+\alpha} - \alpha = 0$

$\begin{cases} -\alpha^2 - \alpha + 2 = 0 \\ \alpha + 3 \neq 0 \end{cases}$ معناه $\frac{-\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha + 3} = 0$

$\alpha = -2$ مقبول ✓ و $\alpha = 1$ مرفوضة لأنها تعوض في q فنجد $q = \frac{1}{4}$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ حدها الأول V_0.

$V_0 = -1$ فإن $\alpha = -2$.

الحد الأول:

فكرة 2 (الموضوع الثاني)

f ↗ و $a \leq x \leq b$ ؛ $x \in [a,b]$ فإن $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

f ↘ و $a \leq x \leq b$ ؛ $x \in [a,b]$ فإن $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

ب - استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4,7]$ فإن: $f(x) \in [4,7[$

لدينا: x من المجال $[4,7]$ معناه: $4 \leq x < 7$

و f متزايدة تماما على المجال $[4,7]$ إذن:

$f(4) \leq f(x) < f(7)$ إذن: $4 < f(x) < \sqrt{4+5}$ بالتعويض

ومنه: $4 < f(x) < 7$.

إذن: $f(x) \in [4,7[$.

فكرة 3 - نهايات - علوم تجريبية.

فكرة حساب نهاية انطلاقا من العبارة التراجعية:

$h(x) = \sqrt{2x+3}$

شرط لازم تكون متقاربة بالبرهان نفرض $U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3}$ $h(U_n)$ الطريقة.

ومنه:

بما أن (U_n) متتالية متقاربة فإن:

$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ و $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$

$U_{n+1} = h(U_n)$ نحل معادلة $h(l) = l$

$l \quad l \quad l$

$l = \sqrt{2l+3}$

$l^2 = 2l + 3 \Rightarrow l^2 - 2l - 3 = 0$

إذن: $\begin{cases} l = -1 & \text{مرفوض} \times \\ l = 3 & \text{مقبول} \checkmark \end{cases}$

لدينا $0 < U_n < 3$ ومنه:

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 3$.