أفكار الدوال الأسية

Ex27 :

$$g(x) = ax+b - \frac{4e^x}{e^x+2} \qquad Dg = \mathbb{R}.$$

عين a و b حيث (Cg) يقبل النقطة A(ln2; ln2) ويقبل النقطة A مماس موازي لحامل محور الفواصل.

(Cg) يقبل النقطة A(ln2; ln2) :

$g(\ln 2) = \ln 2$.

(Cg) يقبل عند النقطة A(ln2; ln2) مماس موازي لحور الفواصل ⟸ $f'(x_0) = 0$ أفقي

معامل توجيه كي نطبق بها فنا 2 معلومات

$g'(\ln 2) = 0$ نقطة A للتوفر مماس حادي

$g(\ln 2) = \ln 2$ ⟵

$$a\ln 2 + b - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2} = \ln 2$$

$$a\ln 2 + b - \frac{8}{4} = \ln 2 \quad ----(1)$$

$g'(\ln 2) = 0$ ⟵

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة.

$$g'(x) = a - \frac{4e^x(e^x+2) - 4e^x(e^x)}{(e^x+2)^2}$$

$$= a - \frac{4e^{2x} + 8e^x - 4e^{2x}}{(e^x+2)^2}$$

$$= a - \frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$

$g'(\ln 2) = 0$

$$a - \frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2} = 0$$

$$a - \frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2} = 0$$

$$a - \frac{8\times 2}{16} = 0$$

$$a - 1 = 0 \quad \text{ومنه} \quad a = 1$$

بتعويض $a=1$ في (1) نجد:

$$\ln 2 + b - 2 = \ln 2$$

ومنه: $b - 2 = 0$

$b = 2$

يمكننا أن نطرح الطريقة الصحيحة:

(Cg) يقبل عند النقطة $A(x_0; y_0)$ ⟸ $g(x_0) = y_0$ و $g'(x_0) = 0$

$g'(x_0) = 0$ يوازي محور أفقي أو أفقي أصلي

$g(x) = ax+b$ يوازي المستقيم ذي المعادلة $y = ax+b$

$g(x_0) = 0$ متعادل تزويجي

فكرة 2 : Ex27

$$f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$$

تباين :

$f(x) - (-)$ حيث (حسابيا فرق) ⟸ لزم نتيجة = 0.

$\mathbb{R}$ ⟵ b_1 :

من طرف نحل بالخارج. ⟵ b_2 :

b_1 :

$$\Rightarrow x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2} - x + 2 - \frac{8}{e^x+2}$$

$$= 4 - \frac{4e^x}{e^x+2} - \frac{8}{e^x+2}$$

$$= 4 + \frac{-4e^x - 8}{e^x+2}$$

$$= \frac{4e^x + 8 - 4e^x - 8}{e^x+2} = 0.$$

b_2 : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2} + 2 - 2$ ⟵ أفرق

$(x-2) + \left[4 - \frac{4e^x}{e^x+2}\right]$ ⟵ $x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$

توحيد المقامات

$$= x - 2 + \frac{4e^x + 8 - 4e^x}{e^x+2}$$

$$= x - 2 + \frac{8}{e^x+2}.$$

فكرة 3 : Ex27

دراسة الإشارة :

$\frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2} \geq 0$

لكي يكون عندنا تربيع في البسط نبرهن دراسة إشارة البسط فيها تنعدم

$e^x - 2 = 0$ ومنه $e^x = 2$ أي $x = \ln 2$ بأخذ اللغاريتم

$\ln 2 = 0$

$= 0$

$a - 1 = 0$ ومنه $a = 1$

فكرة 4 : BAC 2022 (S)

المناقشة البيانية: عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

$f(x) = ax + b$

1- لزم نحدد طبيعة المناقشة ⟸ مناقشة معادلة

2- نتأكد من معامل توجيه المستقيم في حالة $f(x) = x + m$ ⟸ 1

3- نروح لجدول التغيرات ونحسب فيه $f(x) - x$ ونقيس معامل التوجيه

⟸ نعلم أن المنحنيين متوازيين لأنهما عندهما نفس معامل توجيه

⟸ يوازي المماس $y = x$

4- نحدد m ونقارنهم مع محور التراتيب.

$\frac{8}{e^x+2}$

معناه مماس موازي لحور الفواصل $f'(x_0)$ معامل توجيه $=0$ أفقي

$g'(\ln 2)=0$ معلومات 2 و 1 لكي نجد a و b ومماس (T) في النقطة A ذات الفاصلة $\ln 2$

$g(\ln 2)=\ln 2$

$$a\ln 2+b-\frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2}=\ln 2$$

$$a\ln 2+b-\frac{8}{4}=\ln 2 \quad \cdots\cdots (1)$$

$g'(\ln 2)=0$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها الحاصلة.

$$g'(x)=a-\frac{4e^x(e^x+2)-e^x(4e^x)}{(e^x+2)^2}$$

$$=a-\frac{e^x(+4e^x+8-4e^x)}{(e^x+2)^2}$$

$$=a-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$

$g'(\ln 2)=0$ معناه

$$=a-\frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2}=a-\frac{16}{16}=0$$

$a-1=0$ معناه $a=1$

بتعويض a=1 في (1) نجد:

$\ln 2+b-2=\ln 2$

$b-2=0$ معناه $b=2$

1.

• تبيان أن: $a=1$ و $b=-1$ إذا علمنا أن:

$$f(x)=(x^2+a)e^x+b.$$

لـ إ ن ظ فا وائل قلنا تحسب في القاعدة البيانية ⇐ جاد الثوابت.

لـ القراءة البيانية استخرجنا

$f'(0)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}=-1$

① لدينا: $f'(0)=1$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=2xe^x+e^x(x^2+a)$$
$$=e^x(x^2+2x+a)$$

ونعلم أن: $f'(0)=1$

$$\Rightarrow e^0(0^2+2(0)+a)=1$$

ومنه: $\boxed{a=1}$.

② لدينا: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$

حسب النهاية f:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+a)e^x+b \quad (+\infty\times 0+b)$$

بالنشر:

$$\lim_{x\to-\infty}e^x x^2+e^x a+b=b$$

ونعلم أن: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$

أي أن $\boxed{b=-1}$

ومنه الدالة f تركتب من الشكل:

$$f(x)=(x^2+1)e^x-1.$$

• فكرة الدالة الزوجية:

g زوجية:

ش1: $x\in D_g$ و $-x\in D_g$.

ش2: $g(-x)=g(x)$.

← إذا كان الشرط 1 من ش محقق مباشرة ش2 صراحة يكون محقق مثلا:

مكانش تناظر بالنسبة للـ 0 ⇐ $D_f=[-1,3]$

لـ مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة للـ 0 هنا

فكرة لـ ⇐ RAC2016 ⇐ 38(SD)

$$g(x)=2e^x-x^2-x.$$

$$g'(x)=2e^x-2x$$

دراسة اتجاه تغير g':

$$g''(x)=2e^x-2.$$

إشارة g''

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$

اتجاه تغير g': g' متناقصة تماما من المجال $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما من المجال $[0,+\infty[$.

استنتاج إشارة $g'(x)$:

← ⊕ لزم نبرر جدول التغيرات.

⊕ في إشارة g نلقاوها إما عن ⊕ يقوم ق.م و⊕ القيم حدية

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↘	$g'(0)=1$	↗

$g'(0)=1$ ⇐ قيمة حدية صغرى.

لـ بنا: $g'(0)\geq 1>0$ بالتالي $g'(x)>0$ موجبة

لـ فكرة هذا التمرين تكمل في: ← بدأنا من إشارة $g''(x)$ فوجدنا اتجاه تغير الدالة $g'(x)$. ثم وجدنا إشارة $g'(x)$ لنجد بعدها اتجاه تغير الدالة $g(x)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
g'	$+$	
$g(x)$	↗	

Ex1 = MAC 2016.

بيان أن :

$f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + \frac{2}{\alpha - 1}$

نعلم أن : $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$2e^\alpha - \alpha^2 - \alpha = 0$

$e^\alpha = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$ ← نعوض في الدالة f

$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{1}}$ ثم

$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2+\alpha-2\alpha}{2}} = \frac{\alpha^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}}$

بالتقابل =

$= \alpha^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right) \cdot \frac{2}{(\alpha^2-\alpha)}$

$= \frac{\alpha^2(\alpha^2+\alpha)}{\alpha^2-\alpha}$ باخراج α كعامل من كل من البسط والمقام

$= \frac{\alpha^2(\alpha^2+\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{\alpha(\alpha^2+\alpha)}{\alpha-1}$

$= \frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$ القسمة الاقليدية.

$\alpha^3+\alpha^2 \mid \alpha-1$

$-\alpha^3+\alpha^2 \mid \alpha^2+2\alpha+2$

$0\ 2\alpha^2$

$-2\alpha^2+2\alpha$

$0\ 2\alpha$

$-2\alpha+2$

$= 0\ 2$

$\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1} = \alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$

ومنه المطلوب :

$f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha-1}$.

فكرة : Ex1

$-1,3 < \alpha < -1,2$

③ استنتاج إشارة $g(\alpha)$ على $\mathbb{R}$

من جدول التغيرات + ب.ق.م (نقوس α وبيانيا نعوض بها في الدالة).

$g(\alpha) = 0$ ← ب.ق.م ←

← جدول تغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$-g(x)$		+	
$g(\alpha)$			+

إذن : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(\alpha)$	−	0	+

② تبيان أن : $f(\alpha) = \alpha + 1$

$f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$; $g(\alpha) = e^x + x + 1$

ط1 = حساب الفرق :

$f(\alpha) - (\alpha+1) =$

$\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} - \frac{(\alpha+1)}{1} = \frac{\alpha e^\alpha - (e^\alpha+1)(\alpha+1)}{e^\alpha+1}$

$= \frac{\alpha e^\alpha - \alpha e^\alpha - e^\alpha - \alpha - 1}{e^\alpha+1}$

$= \frac{-e^\alpha - \alpha - 1}{e^\alpha+1} = -\frac{(e^\alpha+\alpha+1)}{e^\alpha+1}$ $g(\alpha)$

$= \frac{-g(\alpha)=0}{e^\alpha+1}$ نعلم أن : $g(\alpha) = 0$

إذن : $f(\alpha) - (\alpha+1) = 0$ ومنه :

$f(\alpha) = \alpha + 1$.

ط2 = استعمال $g(\alpha) = 0$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ إذن $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$

و $e^\alpha = -\alpha - 1$

$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{(-\alpha-1)+1}$

$= \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha} = \alpha+1$

فكرة:

Ex17.

$f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$.

(ش) تبيان أنه ؛ مع تغيير التبجة هندسيا.

$f(x)+f(-x) = 2$.

لدينا:

$\frac{3e^x-1}{e^x+1} + \frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \cdot \frac{e^x}{e^x}$

$= \frac{3e^x-1}{e^x+1} + \frac{3-e^x}{1+e^x} = \frac{2e^x+2}{e^x+1}$; $e^x \cdot e^{-x} = 0$

$= \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2$

- $\Omega(\alpha;\beta)$: مركز تناظر (f) يقبل
- $2\alpha - x \in D_f$; $x \in D_f$
- $f(2\alpha-x)+f(x) = 2\beta$

- $f(x)+f(-x) = 2$
- $f(2\alpha-x)+f(x) = 2\beta$

بالمطابقة:

$\begin{cases} f(-x) = f(2\alpha-x) \\ 2\beta = 2 \end{cases}$

$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$2\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{2} = \beta = 1$

- لدينا.

$f(2(0)-x)+f(x) = 2(1)$

إذن (C_f) يقبل مركز تناظر بالنسبة $\Omega(0;1)$ متناظر

فكرة = Ex17

- التقاطع مع محور الفواصل نحل المعادلة

$f(x) = 0$

وكي يكون عندنا دالة عبارة عن:

$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} \rightarrow \begin{cases} \text{بسط} = 0 \\ \text{مقام} \neq 0 \end{cases}$

- التقاطع مع محور التراتيب نحسب

$f(0) = \ldots$ النقطة:

فكرة: Ex21: إشارة $g(x)$ حسب الدالة

- استنتاج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي

من خلال الدالة العددية المشتقة نلزم لكي تكون تغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$g(0)=0$	↗

أقل قيمة توصلت إليها g هي 0

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى $g(0)=0$

ومنه $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x

$g(x) = e^x - x - 1$

(3) على أنه: من أجل كل x $e^x - x > 0$

لدينا: $g(x) \geq 0$ إذن: $e^x - x - 1 \geq 0$

بالتحديد: $e^x - x \geq 1$ $e^x - x \geq 1 > 0$

ومنه: $e^x - x > 0$

فكرة في النهايات Ex21

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \frac{\infty}{\infty}$ لازم نخرج x كعامل مشترك لأن e^x تئول إلى 0 عندما $x \to -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 1)} = -1$

$g(x) \geq 0$

نبروفيا كي نجيبو نتاعة باه نشوفو وين الدالة تقدام

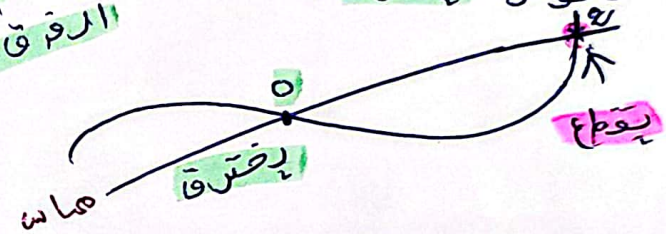
- منبروش كي نكتب $g(x) > 0$

فكرة في كارين:

كي يقلنا كاين مماس عند نقطة x_0 في جدول دراسة مماس مع المنحنى

هي لي تقدم الرفيق

يقولك يخترق.



فكرة الدالة الزوجية:

f دالة فردية.

$x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ هي لي تكون حاسبينها من قبل

$f(-x) = -f(x)$

$f(x) = -f(-x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -f(-x)$

نقطعو على نحو $+\infty$

$= \lim_{x \to +\infty} \ominus f(+\infty)$

نتيجة

هذه نزيدوها في $\ominus$

Ex37 : SC ⇐ BAC2017 = فكرة

لاستنتاج إشارة $g(-x)$ انطلاقا من $g(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

نرجع نحوها بالاتجاه قبل

إشارة $g(-x)$ بيانيا:

$g(-x)$ نظير $g(x)$ بالنسبة لمحور التراتيب.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
	+	0	−

حسابيا:

$g(x) = 0$ لما: $x = 1$

إشارة $g(-x) = 0$ لما: $-x = 1$ إذن: $x = -1$ الحالة

$g(x) > 0$ لما: $x > 1$

إشارة $g(-x) > 0$ لما: $-x > 1$ إذن: $x < -1$ الحالة

$g(x) < 0$ لما: $x < 1$

إشارة $g(-x) < 0$ لما $-x < 1$ إذن: $x > -1$ الحالة

$g(x)$ = تفس طريقة

- $g(-x)$: حسن
- $g(2x)$
- $g(e^x)$
- $g(\frac{1}{x})$

فكرة حد مركبة:

- نبدا بمجموعة التعريف في جدول.

تغيرات أو دراسة الوضع النسبي أو حلول

باه نتعرف وين (العدام) و(ميلان) ووين (غير معرفة).

كيفية إنشاء المنحنى (C) :

$x \mapsto e^x \longrightarrow y = e^{-x} - 2$

(C)

$e^x \xrightarrow{①} e^{-x} \xrightarrow{②} e^{-x} - 2$

① تناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

② إنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

- التمثيل البياني للدالة : $x \mapsto e^{-x}$ هو تناظر التمثيل البياني للدالة e^x بالنسبة إلى محور الترتيب .

(C) هو صورة التمثيل البياني $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

فكرة :

Ex40: BAC 2013 (SC)

لتبيان أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حل α وحيدا في $]-\infty, 1[$ وبالتقابل نحصل على تأطير حصر للعدد α .

⇓

الدالة f متناقصة تماما ومعرفة على المجال $]-\infty, 1[$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ < }} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \end{cases}$$

أي أن : $0 \in]-\infty, 2[$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α في المجال $]-\infty, 1[$ ويحقق $f(\alpha) = 0$.

لتأطير حصر للعدد α :

$f(0,21) = 0,011$ و $f(0,22) = -0,007$

$$\begin{cases} f(0,22) \times f(0,21) < 0 & -① \text{ b} \\ 0 \in]f(0,22) ; f(0,21)[& ② \text{ b} \end{cases}$$

ومنه : $0,21 < \alpha < 0,22$.