أفكار: الأعداد المركبة

$z_3^{12} = \cos(7\pi) + i\sin(7\pi)$.

$\begin{cases} \cos(2k\pi+\theta) = \cos\theta \\ \sin(2k\pi+\theta) = \sin\theta \end{cases}$ دورة كاملة $= 2k\pi$ — زاوية $= (2k+1)\cdot\pi$

$= \cos(6\pi + \pi) + i\sin(6\pi + \pi)$

$= \underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin(\pi)}_{0} = \boxed{-1}$.

- توظيف الطويلة والعمدة في الأعداد المركبة:

$AB = |z_B - z_A|$ ← طويلة — طول AB

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ ← شعاع $\overrightarrow{AB}$

$\text{Arg}(z - z_0)$ ← $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ زاوية

$\text{Arg}(z_B - z_A)$ ← $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ زاوية

$\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ ← $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ زاوية

$z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$ — I منتصف القطعة $[AB]$

$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ — G مرجح $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

$(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)$

⇓

حالة خاصة من المرجح: G مركز ثقل المثلث ⇐ $\alpha = \beta = \gamma = 1$

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

تمارين ص 19:

- في كل حالة منتصف قطعة: اثبت أن يمكن أن تكون $[BC]$ و $[OA]$ متناصفتان.

---

④ استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

لدينا: $z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ ← شكل جبري

$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ← شكل مثلثي

- بما يتساويان وذو حوامل متوازية.

معناه: $z = z'$

$\begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$

$\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

ومنه:

$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

نوحد المقام

---

⑤ تبيان أن: z_3^{12} حقيقي

34 دقيقة

$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

DE MOIVRE دستور موافر.

لدينا: $z_3^{12} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{12}$

$= 2^{12}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{12}$

$= \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{12}$

هرتز بقيا مثال دستور موافر

$(a \times b)^4 = a^4 \cdot b^4$ خواص القوة

- باستعمال دستور موافر نجد:

$\cos(12 \cdot \frac{7\pi}{12}) + i\sin(12 \cdot \frac{7\pi}{12})$

حويلة = متقايسة بينما و ≠ ≠ (متقايسة)

عبد = زاوية قائمة و ≠ ≠ متقايسة

فكرة:

لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O (المبدأ).

$z_D = 3 - 2i\sqrt{3} \longrightarrow z_E = -3 + 2i\sqrt{3}$.

نظير بالنسبة إلى محور التراتيب

$A_2(-x; y)$ • $A_1(x; y)$ •

نظير بالنسبة إلى مبدأ

$A_4(-x; -y)$ •

نظير بالنسبة إلى محور الفواصل

$A_3(x; -y)$ •

طبيعة المثلث:

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$: مثلث قائم وقياسي الساقين

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$: المثلث ABC قائم في B

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$: مثلث ABC متساوي الساقين

$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{3} = 60° \end{cases}$

المثلث متقايس الأضلاع

لي يكون غير زاوية $\frac{\pi}{3}$ يدي طويلة ع يكون مثلث كيفي.

مثل:

لدينا: $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ ومنه $\frac{BA}{BC} = 1$

أي $BA = BC$

و:

$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ معناه $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

ومنه:

المثلث: متقايس الأضلاع.

الارتباط: خطي، التعامد، الاستقامة

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ ↑ ← تخيلي صرف = $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان

0 ↑ ← حقيقي $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا (نقطة مشتركة بينهما التعامد إذن التقاطع الاستقامة)

Arg = π ← أدنية π

فكرة: اثبت أن التربيعان $3+4i$

$x^2 + y^2 = 3$ ——— (1) جزء حقيقي

$2xy = 4$ ——— (3) جزء تخيلي

$x^2 + y^2 = 5$ ——— (2) طويلة

بجمع (1) و (2) نجد:

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = -2$ أو $x = 2$ أي

بتعويض في (3) نجد:

من $x = 2 \longrightarrow y = 1$ أي $4y = 4$

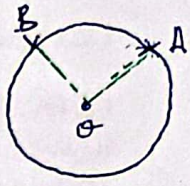
من $x = -2 \longrightarrow y = -1$ أي $-4y = 4$

$-2 - i$ و $2 + i$ هما جذران مختلفان

فكرة: تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

الحل:

نقيس المسافة بين OA و OB



معناه A و B يبعدان عن O بنفس البعد أي مركز دائرة

الطول OA و OB هو طويلة.

$OA = |z_A - z_O| \quad ; \quad OB = |z_B - z_O|$

حيث: $OA = OB$ إذن A و B تنتميان إلى دائرة نصف قطرها يساوي $\sqrt{6}$ مثلا

معادلة الدائرة: (مركز x_0 و y_0)

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = r^2$ أي: $x^2 + y^2 = 6$

فكرة: BAC 2019(SC)N°02 - T.I

لإنشاء السحاب الذي كمثل A بـ C

معناه:

$z' = az + b = z' = z + b$

$a = 1$

$z_C = z_A + b$

D صورة B

$z_D = z_B + b$

مثال: ليس تشكل أسي $z = -3(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}})$

$-3 \Rightarrow |-3| = 3$

$\arg(-3) = \pi + 2k\pi \; , k \in \mathbb{Z}$.

ومنه $= 3e^{i\pi} \cdot 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $z = 6\sqrt{2}e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})}$

$= 6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ← هذا تشكل أسي.

$z = -2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)}$ ← هذا تشكل أسي