07 - 2023 BAC

المجاميع والجداءات في المتتاليات

المجاميع:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية	المتتالية الثابتة
$S = \text{عدد الحدود} \cdot \left(\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right)$	$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$	$S = \text{الحد الأول} \times \text{عدد الحدود}$

عدد الحدود:

$$\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول} + 1$$

I - (U_n) متتالية حسابية، حدها الأول $U_0 = 3$ وأساسها $r = 2$.

1- عبارة الحد العام بدلالة n:

(U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $U_0 = 3$

$$U_n = U_0 + (n-0)r$$

$$U_n = 3 + 2n$$

2- حساب بدلالة n المجاميع: نرمز للحد الأخير ← مطبوعة U_n ← حسابية

- $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

عدد الحدود: $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = \left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right) \times (n+1) = (n+1) \times \left(\frac{3 + 3 + 2n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{6 + 2n}{2}\right)$$

$$S_n = (n+1)(3+n) =$$

- نرمز للحد الأخير.

- $S_n' = e^{U_0} + e^{U_1} + \cdots + e^{U_n}$ ← حسب حد أخير نجد متتالية جديدة W_n

ليكن: $W_n = e^{U_n}$ ⇐ $W_n = e^{U_n \cdot (6+2n)} = e^3 \cdot e^{2n} = e^3 (e^2)^n$

متتالية هندسية.

ومنه: $= W_0 + W_1 + \cdots + W_n$

عدد الحدود:
⇒ $n - 0 + 1$
⇒ $n + 1$.

$$S_n' = W_0 \times \frac{1 - (e^2)^{n+1}}{1 - e^2} = e^3 \left(\frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}\right)$$

(U_n) متتالية حسابية ← exp ← متتالية هندسية.

Scanné avec CamScanner

خرب القوى مع الأسس.

• $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$

$= e^{u_0 + u_1 + \dots + (u_n)}$ حسابية.

$= e^{S_n} = e^{\frac{(3+n)(n+1)}{2}}$

II - (u_n) متتالية هندسية، حدودها موجبة تماما:

$$\begin{cases} \ln u_3 - \ln u_4 = -1 \\ \ln u_3 + \ln u_4 = 5 \end{cases}$$

1 - تعيين أساس متتالية (u_n) وحدها الأول u_0:

(u_n) متتالية هندسية.

كتابة عبارة الحد العام: $u_n = u_0 \cdot q^n$ $\Rightarrow$ لدينا: $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_4 = u_0 \times q^4$

• $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$ إذن: $\ln \frac{u_3}{u_4} = -1$ ومنه: $\boxed{\frac{u_3}{u_4} = e^{-1}}$

• $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$ إذن: $\ln(u_3 \times u_4) = 5$ ومنه: $\boxed{u_3 \times u_4 = e^5}$

لدينا: $\frac{u_3}{u_4} = e^{-1}$ معناه: $\frac{u_0 \cdot q^3}{u_0 \cdot q^4} = e^{-1}$ أي: $q^{-1} = e^{-1}$ $\leftarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{e}$

ومنه: $q = e$

ومنه: $q = e$

لدينا: $u_3 \cdot u_4 = e^5$ ومنه: $(u_0 \cdot q^3) \times (u_0 \cdot q^4) = u_0^2 \cdot q^7 = e^5$

(u_3 و u_4)

إذن: $u_0^2 \cdot q^7 = e^5 \Rightarrow u_0^2 = \frac{e^5}{e^7} = u_0^2 = e^{-2}$

$u_0^2 = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \boxed{u_0 = \frac{1}{e}}$ أو $u_0 = -\frac{1}{e}$ (مرفوضة)

2 - كتابة (u_n) بدلالة n:

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e$ وحدها الأول $u_0 = \frac{1}{e}$ ومنه حدها العام:

$u_n = u_0 \cdot q^n \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{e} \cdot (e)^n}$

أساس. أول حد.

3 - كتابة بدلالة n:

• $S_n = u_0 + u_1 + \dots + \boxed{u_n}$ حد أخير ... u_n هو عدد حدود

$S_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \Rightarrow S_n = u_0 \cdot \frac{1 - (e)^{n+1}}{1 - e} = S_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$

Scanné avec CamScanner

$$S_n = \frac{1-e^{n+1}}{e-e^2}$$

- $P_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$ — نجد من كل حدها يساويه

$$= \left(\frac{1}{e}\cdot e^0\right) \times \left(\frac{1}{e}\cdot e^1\right) \times \cdots \left(\frac{1}{e}\cdot e^n\right)$$

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \left(\underbrace{e^{0+1+2+\cdots+n}}_{\text{حساب}}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \left(e^{\left(\frac{0+n}{2}\right)(n+1)}\right)$$

$$P_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

- $S'_n = U_0^2 + U_1^2 + \cdots + U_n^2$ — هذه سيتة لكن ما تربح.

$$U_n^2 = \left(\frac{1}{e}\cdot e^n\right)^2 = U_n^2 = \frac{1}{e^2}\cdot e^{2n} = \underbrace{U_n^2 = \frac{1}{e^2}\cdot (e^2)^n}_{\text{متتالية هندسية}}$$

$$S'_n = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2} = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}$$

$$S'_n = \frac{1-e^{2n+2}}{e^2-e^4}$$

$$S''_n = (U_0^k) + (U_1^k) + \cdots + \boxed{(U_n^k)} \leftarrow \text{متتالية هندسية}$$

$$S''_n = \frac{1}{e^k}\cdot\frac{1-(e^k)^{n+1}}{1-e^k} = S''_n = \frac{1-e^{kn+k}}{e^k-e^{2k}}$$

- $T_n = U_0 + 2U_1 + 2^2U_2 + \cdots + \boxed{2^n U_n}$ — هذا متتالية هندسية ×م

$$\Rightarrow 2^n U_n = 2^n \cdot \frac{1}{e}\cdot(e^n) = \underbrace{\frac{1}{e}\cdot(2e)^n}_{\text{م. هندسية}} =$$

$$T_n = \frac{1}{e}\cdot\frac{1-(2e)^{n+1}}{1-2e}$$

$$T_n = \frac{1-(2e)^{n+1}}{e-2e^2}$$

- $T'_n = U_0 \times 2U_1 \times 2^2U_2 \times \cdots \times 2^n U_n$.

$T'_n = \left(\frac{1}{e}\cdot e^0\right)\left(2\cdot\frac{1}{e}U^1\right)\times\left(2^2\cdot\frac{1}{e}\cdot U_2\right)+\cdots\left(2^n\cdot\frac{1}{e}\cdot e^n\right)$ — نجد كل حدها يساويه في جزء.

Scanné avec CamScanner

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \times \left(e^{0+1+2+\cdots+n}\right) \cdot 2^{0+1+2+\cdots+n}$$

م. حسابية — م حسابية

$$T_n' = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \cdot \left(e^{\frac{0+n}{2}(n+1)}\right) \cdot 2^{\frac{0+n}{2}(n+1)}$$

$$T_n' = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \times e^{\frac{n}{2}(n+1)} \times 2^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

- $A_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \cdots \times e^{u_n}$

$u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ متتالية هندسية ... م

$= e^{S_n}$

$A_n = e^{S_n} = e$

- $b_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_n)$.

$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{e} \cdot e^n\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln(e^n)$

$= \ln\left(\frac{1}{e}\right) + n \ln e$ ← ح الأول — م. حسابية

أساس

u_n متتالية هندسية $\xrightarrow{\ln}$ متتالية حسابية:

$$b_n = \left(\frac{\ln\frac{1}{e} + \ln\frac{1}{e} + n\ln e}{2}\right)(n+1)$$

$$= \frac{-1-1+n}{2}(n+1) \quad b_n = \left(\frac{-2+n}{2}\right)(n+1).$$

$$b_n = \left(-1 + \frac{n}{2}\right)(n+1).$$

$C_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \cdots + \sqrt{u_n}$. م. هندسية

$\sqrt{u_n} = \sqrt{\frac{1}{e} \cdot e^n} = \sqrt{\frac{1}{e}} \cdot \sqrt{e^n} = \sqrt{\frac{1}{e}} \cdot \sqrt{e}^n$

$\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{e}} (\sqrt{e})^n$ لي هندسية .م

$$C_n = \sqrt{\frac{1}{e}} \cdot \frac{1-(\sqrt{e})^{n+1}}{1-\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1-\sqrt{e}^{n+1}}{1-\sqrt{e}}$$

$$C_n = \frac{1-\sqrt{e}^{n+1}}{\sqrt{e}-e}$$

Scanné avec CamScanner

• $D_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \boxed{\frac{1}{U_n}}$ نبين طبيعة المتتالية U_n

$\frac{1}{U_n} = \frac{1}{\frac{1}{e}\cdot(e)^n} \Rightarrow \frac{1}{U_0} = \frac{1}{\frac{1}{e}} \cdot \frac{1}{e^n} = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{e}} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n}$ نبين أن p

$$D_n = e \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = e \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}}$$

$$D_n = e \cdot \frac{e}{e-1} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{D_n = \frac{e^2}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right).}$$

• $E_n = \ln\left(\frac{U_1}{U_0}\right) + \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right) + \dots + \boxed{\ln\left(\frac{U_n}{U_{n-1}}\right)}$ BAC 2018

$= \ln\left(\frac{U_1}{U_0} \times \frac{U_2}{U_1} \times \dots \times \frac{U_n}{U_{n-1}}\right)$ la somme telescopique.

$= \ln\left(\frac{U_n}{U_0}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{e}\cdot e^n}{\frac{1}{e}}\right) = \ln e^n = E_n = n$

• $L_n = U_0 + U_2 + \dots + \boxed{U_{2n}}$ نبين أن p

$W_n = U_{2n} = \frac{1}{e}\cdot e^{2n} = \underbrace{\frac{1}{e}\cdot(e^2)^n}$ متتالية هندسية

$= W_0 + W_1 + \dots + W_n.$

$L_n = \frac{1}{e} \times \frac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}$

$$\boxed{L_n = \frac{1-e^{2n+2}}{e-e^3}}$$

• $X_n = U_1 + U_3 + \dots + U_{2n-1}$

$W_n = U_{2n-1} = \frac{1}{e}\cdot e^{2n-1} = \frac{1}{e}\cdot e^{2n}\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}\cdot(e^2)^n \cdot \frac{1}{e}$

$W_n = \underbrace{\frac{1}{e^2}\cdot(e^2)^n}$ أساس هندسية p

$X_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ← مجموع ؟

$X_n = 1 \cdot \frac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2} = \boxed{X_n = \frac{1-e^{2n}}{1-e^2}}$

Scanné avec CamScanner

المجاميع:

12 حسابية ؛ هندسية ؛ ثابتة ← تطبق القاعدة فقط .

14 حسابية أو هندسية (يطبق عملية)

حسابية — Exp ← هندسية

هندسية — ln ← حسابية

هندسية — مقلوب ← هندسية
حيذر
أس

13 هي somme Telescopique (متتالية مجموع تيلسكوبي).

14 نعرف طبيعة المتتالية (نستغل العلاقة المفتاحية) تختلف من تمرين لآخر